MAGASABBFOKÚ MÁTRIXEGYENLETEK MEGOLDÁSA

Tuzson Zoltán

Akár a régebbi, akár az alternatív XI. osztályos algebra tankönyveket lapozva, akár példatárakban vagy matematikai versenyeken gyakran találkozunk egynél magasabb fokú mátrixegyenletekkel is, amelyek megoldása nem éppen egyszerű.

A továbbiakban kiváltképpen ilyen típusú mátrixegyenletek megoldásának módszereiről írunk:

Oldjuk meg az $X^n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $X \in M_2(C)$ egyenletet, ha a, b, c, d adottak.

Noha a legtöbb tankönyvben a megoldáshoz szükséges fogalmak elszórtan megtalálhatók, túl kevés fontosság jut ezeknek, hiszen egyes szükséges fogalmak a mártixok, mások a determinánsok, megint mások a sorozatok fejezetekben találhatók, és a tananyag tantervi kötöttségei, ezeknek az ötvözését csak későn teszi lehetővé, így legtöbbször ez elmaradhat.

Másfelől, pl. n=2 esetben a legtöbbször az $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ ismeretlen mátrix választással, az X^2 elvégzése után az $x^2+yz=a$, $y(x+u)=b$, $z(x+u)=c$, $zy+u^2=d$ egyenletrendszer megoldásához jutunk, ami eléggé hosszas számolásokat igényel, (kivéve a nagyon sajátos a, b, c, d értékeket). Természetesen az n>2 hatványkitevő esetén ez a módszer már nagyon ritkán használható. Éppen ezért olyan általános jellegű tippeket, trükköket és eljárásokat mutatunk be, amelyek segítségével könnyűszerrel és elegánsan megoldhatunk ilyen, és ennél általánosabb típusú feladatokat.

A továbbiakban felelevenítjük azokat az elméleti fogalmakat és fontosabb eredményeket, amelyeket használni fogunk (nem bizonyítjuk, hiszen a szakirodalomban is szereplő tankönyvekben megtalálhatók), és ezek után jól válogatott megoldott feladatok segítségével mutatjuk be a módszereink hatékonyságát.

Egy mátrix nyoma

Egy $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j\in\overline{1,n}}$, $A\in M_n(C)$ mátrix nyomát Tr(A)-val jelöljük. Ez az elnevezés a francia, angol szóhasználat trace = nyom alapján alakult ki. Értelmezés szerint $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. Ezen értelmezés, és a detemináns értelmezése és tulajdonságai alapján, ha $A, B \in M_n(C)$ és $k \in R$ érvényesek a következő tulajdonságok:

(1) $Tr(A+B) = Tr(A)+ Tr(B)$

(2) $Tr(k\cdot A) = k\cdot Tr(A)$

(3) $Tr(A\cdot B) = Tr(B \cdot A)$

Egy mátrix karakterisztikus egyenlete

Egy $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j\in\overline{1,n}}$, $A\in M_n(C)$ mátrix esetén $P(x)= \det(A-x\cdot I_2)$ a mátrix karakterisztikus $\det(A-x\cdot I_2)= 0$ pedig a karakterisztikus egyenlete. A továbbiakban *csak a másodrendű négyzetes mártix* karakterisztikus egyenletével foglalkozunk! Amennyiben $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ekkor a fenti karakterisztikus egyenlet a következő formákban is felírható:

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = 0 \text{ vagy } x^2-(a+d)\cdot x+(ad-bc)= 0$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy fennáll az úgynevezett Cayley-Hamilton egyenlőség:

$$A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2 = 0_2 \text{ vagy } A^2-Tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = 0_2$$

Természetesen n-ed rendű mártix esetén is létezik a Cayley-Hamilton egyenlőség (természetesen bonyolultabb formában), azomban esetünkben erre nem lesz szükség.

Három fontos képlet

A tankönyvekben bizonyították a következő, számunkra nagyon hasznos képletek:

Ha A, B, X $\in M_n(C)$, akkor

1) Ha A = B, akkor det(A)= det(B)
2) det(A$\cdot$ B)= det(A)$\cdot$ det(B), aminek sajátos esete a következő
3) det(X^n)= $(\det X)^n$, minden n pozitív egész számra.

A felelevenített fogalmak és tulajdonságok segítségével kövessük a következő megoldott példákat! A következőkben a másodrendű négyzetes ismeretlen mártixot X-el jelöljük, továbbá vezessük be a t= Tr(X) és d= det(X) jelöléseket, amiket mindvégig használni fogunk.

1. Feladat: Oldjuk meg az $X^2 = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}$, $X \in M_2$ (C) egyenletet. (V.ö. [3], 39. old.)

Megoldás: *1. Módszer.* Jelöljük X = $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$, és kiszámolva az X^2 mátrixot, a megfelelő elemek egyenlőségéből az $x^2 + y\cdot z = 7$ (1) , $y\cdot (x+u) = -5$ (2) , $z\cdot (x+u) = -15$ (3), $z\cdot y + u^2 = 12$ (4) egyenletrendszer adódik. Az (1) és (4) különbségéből $x^2 - u^2 = -5$ (5) továbbá az (5) és (2) arányából x- u= y, vagyis u= x- y (6). A (3) és (2) arányából $z = 3\cdot y$ (7). A (6) és (7) adta u és z értékeket visszahelyettesítve az (1) és (2) egyenletekbe, az $x^2 + 3\cdot y^2 = 7$ és $2\cdot x.\ y - y^2 = -5$ homogén egyenletrendszer adódik ahol bevezetve az $y = k\cdot x$ változócserét, a homogén egyenletrendszerek megoldási módszere alapján $k = -\frac{5}{4}$ és $k = -\frac{1}{2}$ adódik. Az első esetben megoldva az $x^2 + 3\cdot y^2 = 7$ és $4\cdot y = -5\cdot x$ egyenletrendszert, $X = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$, a második esetben megoldva az $x^2 + 3\cdot y^2 = 7$ és $2\cdot y = -x$ egyenletrendszert $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ és $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ adódik.

Megjegyzés: Ha az adott mátrixegyenletben a 7, -5, -15, 12 számok helyett tetszőleges valós számok szerepelnek, az előbbiekben alkalmazott lépések érvényben maradnak, és mindig másodfokú kétismeretlenes homogén egyenletrendszerhez juthatunk, kivéve azt az esetet, amikor a mellékátlón -5 illetve -15 elemek valamelyike (vagy mindkettő) 0, ugyanis ekkor az (1)-(4) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása jóval rövidebb.

2. Módszer. Vegyük mindkét oldal determinánsát , ekkor felírható, hogy: $d^2 = (\det X)^2 = \det(X^2) = 9$, ahonnan $d = \pm 3$. Az X mártix karakterisztikus egyenlete: $X^2 - t\cdot X + d\cdot I_2 = 0_2$ esetünkben $X^2 - t\cdot X \pm 3\cdot I_2 = 0_2$, vagyis $t\cdot X = X^2 \pm 3\cdot I_2$. Válasszuk szét a két esetet .Ekkor a $t\cdot X = X^2 + 3\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{bmatrix}$ egyenlőség a két oldalának nyoma alapján $t^2 = t\cdot Tr(X) = Tr(X^2) = 10+15 = 25$. Ezért $t = \pm 5$, így $\pm 5\cdot X = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{bmatrix}$ alapján $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ és $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$. A második esetben $t\cdot X = X^2 - 3\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$, és ismét a nyomokra térve, az előzőekhez hasonlóan $t^2 = 13$ adódik, ahonnan $t = \pm\sqrt{13}$, és ennek megfelelően $\pm\sqrt{13}\cdot X = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ahonnan még két megoldás az $X = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Feladat: Oldjuk meg az $X^4 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $X \in M_2(R)$ egyenletet. (V.ö. [1])

Megoldás: Előbb megoldjuk az $Y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $Y \in M_2(R)$ egyenletet. Vegyük mindkét oldal determinánsát, ekkor felírható, hogy: $d^2 = (\det Y)^2 = \det(Y^2) = 49$, ahonnan $d = \pm 7$. Az Y mártix karakterisztikus egyenlete: $Y^2 - t\cdot Y + d\cdot I_2 = 0_2$ esetünkben $Y^2 - t\cdot Y \pm 7\cdot I_2 = 0_2$, vagyis $t\cdot Y = Y^2 \pm 7\cdot I_2$. Válasszuk szét a két esetet .Ekkor felírható: $t\cdot Y = Y^2 + 7\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ ahonnan a két oldal nyoma alapján $t^2 = t\cdot Tr(Y) = Tr(Y^2) = 8 + 8 = 16$. Ezért $t = \pm 4$, így $\pm 4\cdot Y = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ alapján $Y = \pm \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A $d = -7$ esetben, az előbbiekhez hasonlóan $t^2 = -12$, de ekkor $Y \in M_2(R)$ nem lehetséges. A megoldandó egyenlet esetén vezessük be az $X^2 = Y$ jelölést, így az $Y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ egyenlet valós megoldásai az előbbiek alapján $Y = \pm \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, vagyis $X^2 = \pm \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Az előbbiekhez hasonlóan, mindkét oldal determinánsát véve $d^2 = (\det X)^2 = \det(X^2) = \pm 1$, és mivel $X \in M_2(R)$, ezért csak a $d^2 = 1$ felel meg, ahonnan $d = \pm 1$. Ennek alapján a karakterisztikus egyenlet $X^2 - t\cdot X \pm \cdot I_2 = 0_2$, vagyis $t\cdot X = X^2 \pm \cdot I_2$. Ezúttal is különválasztva a két esetet, és a nyomokra térve rendre kapjuk, hogy: $t\cdot X = X^2 + I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, tehát $t^2 = t\cdot Tr(X) = Tr(X^2) = 3+3 = 6$, így $t = \pm\sqrt{6}$ és ezért $X = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. A második esetben $t\cdot X = X^2 - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $t^2 = t\cdot Tr(X) = Tr(X^2) = 1+1 = 2$, így $t = \pm\sqrt{2}$, ahonnan az $X = \pm\sqrt{2}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ megoldásokat kapjuk.

3. Feladat: Oldjuk meg az $X^2 + X = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X \in M_2(R)$ egyenletet.

Megoldás: A másodfokú valós függvény mintájára, az $f(X) = a\cdot X^2 + b\cdot X + c\cdot I_2$ másodfokú mátrixfüggvény is hasonlóan kannónikus alakra hozható (figyelem, a mártixok szorzása nem kommutatív!) vagyis $f(X) = a\cdot (X + \frac{b}{2\cdot a}\cdot I_2)^2 + \frac{-\Delta}{4\cdot a}\cdot I_2$ ami azt jelenti, hogy változócserével az $a\cdot X^2 + b\cdot X + c\cdot I_2 = 0_2$ mártixegyenlet olyan mártixegyenletté transzformálható, amelyben a változó mátrix csak egyetlen helyen szerepel, tehát megoldható az előbbiekben bemutatott módszerrel. Esetünkben, a törtegyütthatók elkerülése végett szorozzuk be az adott egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd mindkét oldalhoz adjunk hozzá I_2-t, így a következő egyenletet kapjuk: $(2\cdot X + I_2)^2 = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$. Bevezetve az $Y = 2\cdot X + I_2$ változócserét, az $Y^2 = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixegyenletet kell megoldanunk. Tehát $d^2 = (\det Y)^2 = \det(Y^2) = \pm 1$ ahonnan a valós megoldások $d = \pm 1$. Ennek alapján a karakterisztikus egyenlet $Y^2 - t\cdot Y \pm \cdot I_2 =$

$=0_2$, vagyis $t\cdot Y = Y^2 \pm \cdot I_2$. Az előbbiekhez hasonlóan a nyomokra térve a $t\cdot Y = \begin{bmatrix} -6 & -16 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ egyenletben, $t= \pm 2$ adódik, ahonnan $Y = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ illetve $Y = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$. Továbbá a $d= -1$ esetben $t\cdot Y = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, ahonnan $t= 0$ adódik, a karakterisztikus egyenlet alapján $Y^2= 0_2$ ellentmondás adódik. A kapott két Y megoldás alapján $2\cdot X+ I_2= \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ahonnan $X= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, és a $2\cdot X+ I_2= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ alapján $X= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

4. Feladat: Oldjuk meg az $X^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $X\in M_2$ (R) egyenletet

Megoldás: A két oldal determinánsát véve $d^3= 1$ adódik, így a karakterisztikus egyenlet $X^2\text{-}t\cdot X +\cdot I_2 = 0_2$, vagyis $X^2= t\cdot X - I_2$, ezért $X^3= t\cdot X^2 - I_2\cdot X \Leftrightarrow X^3= t\cdot (t\cdot X - I_2)\text{-}\ t\cdot I_2$ ahonnan $(t^2\text{- }1)\cdot X + \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} = X^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. A két oldal nyomát véve $(t^2\text{- }1)\cdot t - 2\cdot t = -2$ vagyis $t^3\text{- }3t+ 2=0 \Leftrightarrow (t- 1)^2\cdot (t+ 2)= 0$ adódik. A $t= 1$ esetén az előbbi egyenlőség a $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ absurdumot adja, míg $t= -2$ esetén a $3\cdot X= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ adódik, ahonnan $X= \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ adódik, és ellenőrizhető, hogy valóban teljesíti az adott egyenletet.

5. Feladat: Oldjuk meg az $X^3\text{-}4\cdot X^2\text{+ }5\cdot X = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, $X\in M_2$ (R) egyenletet. (Matematikai verseny 1998, v. ö. [2] 34. old.)

Megoldás: Az egyenlet így is felírható $X\cdot (X\text{-}(2\text{-}i)\cdot I_2)\cdot (X\text{-}(2\text{+}i)\cdot I_2)= \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$. A két oldal determinánsából $\det(X\cdot (X\text{-}(2\text{-}i)\cdot I_2)\cdot (X\text{-}(2\text{+}i)\cdot I_2)= 0$ adódik, ahonnan $\det(X)= 0$ (1), vagy $\det((X\text{-}(2\text{-}i)\cdot I_2)= 0$ (2), vagy $\det((X\text{-}(2\text{-}i)\cdot I_2)= 0$ (3). Az X mátrix karakterisztikus polinomja $P(x)= \det(X\text{- }x\cdot I_2)$ alakú, hiszen $X\in M_2(R)$. A (2) és (3) *külön-külön* nem állhat fenn, mert akkor a karakterisztikus polinom komplex együtthatójú lenne, és ez ellentmond az $X\in M_2$ (R) feltételnek. A (2) és (3) *egyidőben* szintén nem teljesülhet, mert ekkor a $P(2\text{-}i)= P(2\text{+}i)= 0$ alapján $P(x)= x^2\text{- }4\cdot x + 5$ adódna, és mivel a karakterisztikus egyenlet másodfokú kell legyen, ezért $X^2\text{- }4\cdot X + 5\ I_2 = 0_2$, így $X\cdot (X^2\text{- }4\cdot X + 5\ I_2) =0_2$ ami aburdum. Tehát csak az (1) állhat fenn, így a karakterisztikus egyenlet $X^2\text{-}t\cdot X= 0_2$ vagyis $X^2 =t\cdot X$, ahonnan $X^3 =t\cdot X^2 = t^2\cdot X$ és mindkettőt visszaírva az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy $(t^2\text{- }4\cdot t\text{+}5)\cdot X = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ (4) ahol a két oldal nyomát véve $(t^2\text{- }4\cdot t\text{+}5)\cdot t= 20$ vagyis $t^3\text{- }4\cdot t^2\text{+}5\cdot t\ \text{-}20= 0$, vagy $(t\text{-}4)\cdot (t^2 \text{+}5)= 0$

adódik, és egyetlen valós zérushely csak t= 4. Ezért a (4) alapján 5· X = $\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, vagyis X= $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ megoldás adódik.

6. Feladat: Igazoljuk, hogy az alábbi esetek egyikében sem létezik olyan $X \in M_2$ (R) mátrix, amelyre: (a) $X^8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $X^5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, (d) $X^6 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

Megoldás: (a) $d^8 = (\det X)^8 = \det(X^8) = -1$ ami $X \in M_2$ (R) esetén absurdum. (b) $d^5 = (\det X)^5 = =\det(X^5) = 0$, így a karakterisztikus egyenlet $X^2 - t \cdot X = 0_2$, ahonnan $X^2 = t \cdot X$, így rendre $X^3 = t \cdot X^2 = t^2 \cdot X$, $X^4 = t^2 \cdot X^3 = t^3 \cdot X$, $X^5 = t^3 \cdot X^4 = t^4 \cdot X$. Tehát $t^4 \cdot X = X^5$ és a két oldal nyomát véve, $t^5 = t^4 \cdot \mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(t^4 \cdot X) = \mathrm{Tr}(X^5) = 0$ ahonnan t= 0, így $X^5 = 0_2$ absudrum adódik.

(c) Bevezetve az $X^3 = Y$ jelölést, $Y^2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ alapján $d^2 = (\det Y)^2 = =\det(Y^2) = 0$, a karakterisztikus egyenlet $Y^2 = t \cdot Y$ ahonnan a nyomok alapján $t^2 = -1$ adódik, ami $Y \in M_2$ (R) esetén lehetetlen, és mivel nem létezik ilyen Y, ezért $X \in M_2$ (R) sem létezik.

7. Feladat : Oldjuk meg az $X^{2007} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $X \in M_2$ (R) egyenletet.

Megoldás: A két oldal determinánsát véve, $d^{2007} = (\det X)^{2007} = \det(X^{2007}) = 0$, ezért a karakterisztikus egyenlet $X^2 - t \cdot X = 0_2$ ahonnan $X^2 = t \cdot X$, így rendre $X^3 = t \cdot X^2 = t^2 \cdot X$, $X^4 = t^2 \cdot X^3 = t^3 \cdot X$, és így tovább,… $X^{2007} = t^{2006} \cdot X$ ahol a két oldal nyoma alapján $t^{2007} = t^{2006} \cdot \mathrm{Tr}(X) = =\mathrm{Tr}(t^{2006} \cdot X) = \mathrm{Tr}(X^{2007}) = 8$, vagyis $t^{2007} = 8$, ahonnan t= $8^{\frac{1}{2007}} = 2^{\frac{1}{669}}$. Így $2^{\frac{2006}{669}} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, ahonnan X= $2^{-\frac{2006}{669}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$. Természetesen 2007 helyett tetszőleges $n \in$ N esetén is ugyanígy járunk el.

8. Feladat: Oldjuk meg az $X^{1001} = \begin{bmatrix} 1 & 3^{1001} - 1 \\ 1 & 3^{1001} \end{bmatrix}$, $X \in M_2$ (R) egyenletet.

Megoldás: Az $X \cdot X^{1001} = X^{1002} = X^{1001} \cdot X$ kommutativitási tulajdonságot alkalmazzuk. Legyen X= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, így $X^{1001} = X \cdot X^{1000} = \begin{bmatrix} a & (a+b)\cdot 3^{1001} - a \\ c & (c+d)\cdot 3^{1001} - c \end{bmatrix}$ illetve $X^{1001} = X^{1001} \cdot X = \begin{bmatrix} a + c\cdot(3^{1001} - 1) & b + d\cdot(3^{1001} - 1) \\ c \cdot 3^{1001} & d \cdot 3^{1001} \end{bmatrix}$ és az előző összefüggés alapján, a megfelelő helyen levő elemek egyenlők, így c= 0, és számolások után $(3^{1001} - 1) \cdot (a + b - d) = 0$, ahonnan d= a+ b adódik, így X= $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$. Induktív módon könnyen igazolgató, hogy $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}^{1001} = = \begin{bmatrix} a^{1001} & (a+b)^{1001} - 1 \\ 0 & (a+b)^{1001} \end{bmatrix}$ (v.ö. [3], 225. old.). és a megfelelő elemek egyenlősége alapján $a^{1001} = 1$ és $(a+b)^{1001} - 1 = 3^{1001} - 1$, ahonnan a=1 és a+ b= 3 , ezért b= 2, tehát X= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Természetesen 1001 helyett tetszőleges $n \in$ N esetén is ugyanígy járunk el.

9. Feladat: Oldjuk meg az $X^{100} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X \in M_2(R)$ egyenletet.

Megoldás: Az $X \cdot X^{100} = X^{101} = X^{100} \cdot X$ kommutativitási tulajdonságot alkalmazzuk.

Legyen $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, így $X^{101} = X \cdot X^{100} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ illetve $X^{101} = X^{100} \cdot X = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$ és az előző összefüggés alapján, a megfelelő helyen levő elemek egyenlők, így d= a és c= -b adódik, ezért $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, így a megoldandó egyenletben a két oldal determinánsát véve kapjuk, hogy $d^{100} = (\det X)^{100} = = \det(X^{100}) = 1$, ahonnan $d = \pm 1$, ellenben a, b $\in R$ miatt $a^2+b^2 = 1$. Az a= cos x és b= sin x jelöléssel, ahol x= arctg $\frac{b}{a}$. Induktív módon könnyen igazolható, hogy $X^{100} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} \cos 100x & \sin 100x \\ -\sin 100x & \cos 100x \end{bmatrix}$ (v.ö. [3], 231. old.). Így a megoldandó egyenletünk $\begin{bmatrix} \cos 100x & \sin 100x \\ -\sin 100x & \cos 100x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ahonnan cos 100x= 0 és sin 100x= 1, ezért 100x= $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k\pi$, ahonnan x = $\frac{(4k+1)\pi}{200}$ és $k \in Z$, és a megoldás $X = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, valamint x= arctg $\frac{b}{a} = \frac{(4k+1)\pi}{200}$ $\Rightarrow$ b= a$\cdot$ $tg\frac{(4k+1)\pi}{200}$ szerint $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ alakba is visszaírhatunk. Természetesen 100 helyett tetszőleges $n \in N$ esetén is ugyanígy járunk el.

Az utóbbi két feladat esetén láthattuk, hogy szükségünk lehet, az X^n kiszámolására. Amennyiben induktív módon nem sejtjük meg az X^n mátrix alakját, úgy másképpen kell ezt meghatároznunk.

Mátrixok hatványának kiszámolása a karakterisztikus egyenlet segítségével

A több lehetséges eljárás közül kettőt mutatunk be. A [3]-ben bemutatott módszer alapján, ismert, hogy az $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ mátrix teljesíti a már említett Cayley-Hamilton összefüggést, miszerint: $X^2-(x+y)\cdot X+(xu-yz)\cdot I_2 = 0_2$ vagyis $X^2 - t\cdot X + d\cdot I_2 = 0_2$ ahol t=Tr(X) és d=det(X). Az $X^2 = t\cdot X - d\cdot I_2$ alapján, minden $n \geq 1$ természetes szám esetén $X^{n+2} = t \cdot X^{n+1} - d \cdot X^n$. Tehát, ha $X^n = \begin{bmatrix} x_n & y_n \\ z_n & u_n \end{bmatrix}$ $\forall$ $n \geq 1$ esetén, akkor $\begin{bmatrix} x_{n+2} & y_{n+2} \\ z_{n+2} & u_{n+2} \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ z_{n+1} & u_{n+1} \end{bmatrix} - d \cdot \begin{bmatrix} x_n & y_n \\ z_n & u_n \end{bmatrix}$.

Innen azonnal adódik, hogy az $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}$, $(z_n)_{n\geq1}$, $(u_n)_{n\geq1}$ sorozatok ugyanazt a másodrendű lineáris rekurziót teljesítik, éspedig egy $a_{n+2} - t \cdot a_{n+1} + d \cdot a_n = 0$ alakú rekurziót, és csupán csak a kezdőértékek különböznek: x_1= x, x_2= x·t-d, y_1= y, y_2= y·t-d, z_1= z, z_2=zc·t-d, u_1= u, u_2= u·t-d. Az ilyen másodrendű homogén lineáris rekurzióval értelmezett sorozat karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - t \cdot \lambda + d = 0$ (a mátrixhoz rendelt karakterisztikus egyenlethez hasonló). A karakterisztikus egyenlet gyökeinek a természetes szerint (v.ö. [3] 19. és 229. oldal) az általános tag képlete a következő lehet:

1) ha $\Delta>0$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a két valós gyök, akkor $a_n = k_1 \cdot \lambda_1^n + k_2 \cdot \lambda_2^n$,

2) ha $\Delta = 0$ és $\lambda_1 = \lambda_2$ a két egybeeső gyök, akkor $a_n = (k_1 \cdot n + k_2) \cdot \lambda^n$,

ha $\Delta < 0$ és $\lambda_{1,2} = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ a két komplex gyök, akkor $a_n = r \cdot (k_1 \cdot \cos nt + k_2 \cdot \cos nt)$, ahol mindenesetben a k_1, k_2 állandókat a kezdőértékekből határozzuk meg.

A [2]-ben (13.-14. old) a következő érdekes módszert találjuk: Igazolni fogjuk, hogy az előző X mátrix esetén léteznek olyan $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozatok, amelyekre $X^n = x_n \cdot X + y_n \cdot I_2$, $\forall$ $n \geq 1$ természetes szám esetén. Ezt a legkönnyebben a teljes matematikai indukció módszerével lehet bizonyítani. Az n=1 esetben $x_1=1$ és $y_1=0$ értékekre az állítás igaz. Továbbá, mivel a karakterisztikus egyenlet alapján $X^2 = t\cdot X - d\cdot I_2$ ezért $x_2=t$ és $y_2=-d$ értékekre az állítás igaz. Feltételezve, hogy $X^k = x_k \cdot X + y_k \cdot I_2$ felírható, hogy:

$X^{k+1} = X^k \cdot X = (x_k \cdot X + y_k \cdot I_2) \cdot X = x_k \cdot X^2 + y_k \cdot X = x_k \cdot (t \cdot X - d \cdot I_2) + y_k \cdot X =$

$= (t \cdot x_k + y_k) \cdot X + (-d \cdot x_k) \cdot I_2 = x_{k+1} \cdot X + y_{k+1} \cdot I_2$ ahol $x_{k+1} = t \cdot x_k + y_k$ és $y_{k+1} = -d \cdot x_k$. Ezúttal egy rekurencia egyenletrendszert kaptunk, ahonnan $y_k = -d \cdot x_{k-1}$, így $x_{k+1} = t \cdot x_k - d \cdot x_{k-1}$ továbbá az $y_{k+1} = -d \cdot x_k$ segítségével $y_{k+1} = t \cdot y_k - d \cdot y_{k-1}$ vagyis mindkét sorozat ugyanazt az $a_{n+2} - t \cdot a_{n+1} + d \cdot a_n = 0$ rekurziót teljesítik, az $x_1=1$, $x_2=t$, $y_1=0$, $y_2=-d$ kezdetértéki feltételekkel. Innen már alkalmazhatók az előbbiekben leírt általános tag meghatározási eljárások.

Befejezésül megjegyezzük, hogy a [2] és [3]- ban számos megoldott feladat is található, ellenben a mátrixegyenletek megoldása céljából, az érdeklődő Olvasónak összegyűjtöttünk néhány feladatot.

Gyakorló feladatok

Az $\in M_2$ (R) halmazon rendre oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket: (1) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, (v.ö. [1]), (2) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (v.ö. [5], 94. old), (3) $X^2 + 2\cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (v.ö. [2], 16. old.), (4) $X^{2000} = \begin{bmatrix} 1 & 2000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (5) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ (v.ö. [2], 30. old.), (6) $X^2 = = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $Y^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$, $Z^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (v.ö. [2], 33. old.), (7) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y^2 = I_2$, $Z^2 = 0_2$, $T^2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ (v.ö. [3], 223. old.), (8) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (MatLap 7/2006, L: 1278, 261. old), (9) $X^{2008} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, (10) $X^2 + X = \frac{1}{4} I_2$ (v.ö. [6], 14. old), (11) $X^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 5050 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (12) $X^{2007} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (13) $X^{12} = \begin{bmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{bmatrix}$, (v.ö. [6], 24. old.). (14) $X^2 = \begin{bmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{bmatrix}$ a Z_5-ben, $Y^2 = \begin{bmatrix} \hat{6} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{6} \end{bmatrix}$, illetve $Z^2 + Z = \begin{bmatrix} \hat{6} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{5} \end{bmatrix}$ a Z_7-ben (v.ö. [6], 25. old.).

Szakirodalom

[1] C. Nastasescu, C. Nita, I. Stancescu: Matematika, A felsőbb algebra elemei, Tankönyv a XI. osztály számára, EDP Bukarest 1990, 21.-22. oldalak.
[2] Costel Chites, Daniel Petriceanu, Andrei Vernescu: manual pentru clasa a XI-A, Editura GIL, 2006
[3] András Szilárd, Balázs Vilmos, Csapó Hajnalka, Szilágyi Jutka: Matematika, A XI. osztály számára, Státus kiadó, Csíkszereda 2002
[4] N. Donciu, D. Flondor: Algebra si analiza matematica I., culegere de probleme, EDP, Bucuresti, 1978
[5] C. Nastasescu, C. Nita, M. Brandiburu, D. Joita: Exercitii si probleme de algebra pentru clasele IX-XII, EDP, Bucuresti, 1981
[6] Ion Petrica, Ion Lazar: probleme de algebra pentru liceu, vol. III (clasele XI-XII), Editura Petrion, Bucuresti