Mit jelent az, hogy határozatlan eset?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Minden bizonnyal a matematika tanulása és tanítása során, a leg nehezebbnek a matematikai analízis tanulása és tanítása bizonyul. Ez állítható mint a diák mint a tanár szemszögéből. Ez egyrészt azért van, mert a matematikai analízis keretén belül természetszerűen kell használjuk az előző osztályokban tanult matematikai fogalmakat, másrészt pedig éppen a matematikai analízis jellegéből adódik, vagyis abból, hogy a végtelennel formális számolásokat kell végeznünk, és ez teljesen más szemléletmód kialakulását igényli.

A matematikai analízissel a tanulók a XI. osztályban ismerkednek meg, és már a kezdeteknél komolyabb nehézségekbe ütközhetnek. Kezdetben, a sajátos nyelvezet, fogalomrendszer és jelölésrendszer kialakítása után máris elkezdődik a sorozatok konvergenciája, a maga útvesztőivel. Bevezetésre kerül az $\overline{R}=[-\infty,+\infty]= R\cup\{-\infty,+\infty\}$ kiterjesztett számhalmaz is. A környezet, torlódási pont, stb. fogalmakkal egyidőben a tanuló megismerkedik a sorozatok konvergenciájának fogalmával is. Itt megpróbáljuk ezt minél szemléletesebbé tenni, majd megállapítjuk, hogy a legegyszerűbb sorozat határértékek a következők: $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ valamint $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$ 0. Ezek és más hasonló példák alapján máris megjelenik a legelső formális művelet az $\frac{1}{\infty}=0$. Ugyancsak az előző két határérték alapján megállapítható, hogy $\infty=\lim\limits_{n\to\infty} n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{0}$ vagyis $\frac{1}{0}=\infty$. És íme eljutottunk a matematikai analízis két alapvető formális műveletéhez, amire épülnek a további formális műveletek. Így hát a tanulók megismerkedhetnek az egyezményes formális műveletekkel, mint például $\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$, stb. Noha ezeknek a formális műveleteknek a tartalma lényegesen eltér a véges számokkal végzendő műveletek tulajdonságaiktól mégis, az intuíció sugallatára legtöbb eredmény (művelet) úgymond „józan ésszel" elképzelhető, vagyis a tanuló elfogadja. De már itt fontosnak látjuk kihangsúlyozni, hogy a ∞ szimbólumot *nem mint valós számot kezeljük, hanem mint sorozat határértéket*! Ezért is hívjuk a vele végzett műveleteket formális műveleteknek, mert a „szokásos" műveleteket végezzük, de éppen nem a „megszokott" szabályok szerint.

A sorozatok konvergencia fogalmának a kialakítása után máris következnek a műveletek a sorozat határértékekkel. Két konvergens sorozat esetén legyen $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és $y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1. Amennyiben létezik az $x\pm y$ érték, úgy $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2. Amennyiben létezik az $x\cdot y$ érték, úgy $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3. Amennyiben létezik az $\frac{x}{y}$ érték, úgy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

4. Amennyiben létezik az x^y érték, úgy $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=\left(\lim\limits_{x\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

Ezek alapján természetesen merül fel a kérdés, hogy miért is vannak leszögezve a „létezik az” $x \pm y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$, x^y feltétel? És pontosan ezek vezetnek el azon esetek leszögezésére, amikor is az előző műveletek nem léteznek. Ezek a következők:

$$(1)\ \infty - \infty, \qquad (2)\ 0 \cdot \infty, \qquad (3)\ \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \qquad (4)\ 1^\infty, 0^0, \infty^0 \quad (*)$$

Ezen 7 esetet úgymond ***„határozatlan esetek”*** –nek nevezzük, legtöbb tankönyvben még úgy is szerepel, hogy ezek a műveletek „értelmetlenek”. De ami a tanuló számára a leg szomorúbb az, hogy ezen két „varázsszó” csupán tartalom nélküli absztrakt megnevezés marad, ugyanis *egyetlen matematikai analízis tankönyvben sem láttam megmagyarázni, hogy mit is jelent, hogy ezek a műveletek „határozatlan esetek”, vagy azt, hogy ezek mitől is lennének „értelmetlen” műveletek*?

Erre a kérdésre természetesen akkor is válaszolhatnánk, amikor már a sorozatok konvergenciája kapcsán számos határérték számolási módszerrel megismerkedett (hiszen ekkor fejlettebb eszközökkel rendelkezünk) a tanuló ellenben ezt nem tartom a legmegfelelőbbnek, ugyanis, ha tisztázatlan fogalmakkal kell dolgozni tovább, és ezekre építve robotosan oldjuk a határérték számolási feladatokat, a tanulóban egyre inkább elmélyül az, hogy ezen fogalmak valami megmagyarázhatatlan, titokzatos dolgok lennének.

A továbbiakban pontosan erre vállalkozunk, hogy a tanuló számára, a lehető legegyszerűbben megmagyarázzuk, hogy mi is a helyzet ezzel a 7 esettel, mit értünk az alatt, hogy „határozatlan esetek” vagy, hogy a „műveleteknek nincs értelme”. Azt, hogy ez mennyire sikerül, a cikk elolvasása után döntse el a Tisztelt Olvasó!

A magyarázatokat mind a négy esetcsoportra megtárgyaljuk. A $\infty - \infty$ formális művelet *nem úgy tekintendő mint két valós szám közötti kivonás*! Hanem így: ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ akkor például $\infty - \infty = \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)$ mivel is egyenlő? Belátjuk, hogy a $\infty - \infty$ ***bármennyivel egyenlő lehet***! Éppen ezért nevezik „határozatlan esetnek”, mert az értéke csak esetenként határozott, és valójában $\infty - \infty$ minden értéke felvehet a $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból. Éppen ebből kifolyólag nem tartom a legszerencsésebbnek az a megfogalmazást amit erre sok tankönyvben használnak, hogy ezen esetek „értelmetlen műveletek”. Nem értelmetlenek, hiszen minden egyes egyedi esetben a megfelelő határozatlan esetet „feloldva” egy-egy eredményt kapunk. Tehát maradjunk annál, hogy a jelzett 7 eset „határozatlan eset”.

(1) A $\infty - \infty$ értékének a tisztázása végett vegyük például a következő két sorozatot: $x_n = n + a$ és $y_n = n$, ahol „*a*” egy tetszőleges valós szám! Nyílván valóan, hogy még a kezdetek kezdetén könnyen belátható, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. És az 1. művelet alapján $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$ $\Leftrightarrow a = \infty - \infty$ vagyis $\infty - \infty = a$. Tehát, ha az $x_n = n + a$ sorozatban az „*a*” valós számot *konkrétan megválasszuk*, $y_n = n$ pedig változatlan, akkor erre a sorozatokra (és) $\infty - \infty = a$ éppen a megválasztott konkrét „*a*” szám.

Tehát a $\infty-\infty$ érték *minden valós számmal egyenlő lehet*! Most belátjuk, hogy $\infty-\infty=+\infty$ vagy $\infty-\infty=-\infty$ is lehetséges. Legyen most $x_n=n^2$ és $y_n=n$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. Továbbá az 1. művelet alapján $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\ \infty-\infty$, másfelől $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\infty$. Tehát ezúttal $\infty-\infty=+\infty$. Ha most összecseréljük a két sorozatot, akkor $\infty-\infty=-\infty$ adódik, tehát $\infty-\infty$ minden értéket felvehet az $\overline{R}=[-\infty,+\infty]$ halmazból.

(2) A $0\cdot\infty$ értékének a tisztázása végett vegyük például a következő két sorozatot: $x_n=\dfrac{a}{n}$ és $y_n=n$, ahol „a” egy tetszőleges valós szám! Könnyen látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,$ és $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. A 2. művelet alapján $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n \iff a=0\cdot\infty$, vagyis $0\cdot\infty=a$. Tehát, ha az $x_n=\dfrac{a}{n}$ sorozatban az „a” valós számot *konkrétan megválasszuk*, $y_n=n$ pedig változatlan, akkor ezekre a sorozatokra $0\cdot\infty=a$ éppen a megválasztott konkrét „a” szám. Ezért tehát a $0\cdot\infty$ érték *minden valós számmal egyenlő lehet*! Most belátjuk, hogy $0\cdot\infty=\pm\infty$ is lehetséges. Legyen most $x_n=\dfrac{a}{n}$ és $y_n=n^2$. Ugyancsak a 2. művelet alapján $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n==0\cdot\infty$, másfelől $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\ \lim\limits_{x\to\infty}(a\cdot n)=\pm\infty$. Tehát $0\cdot\infty$ minden értéket felvehet az $\overline{R}=[-\infty,+\infty]$ halmazból.

(3) A $\dfrac{\infty}{\infty}$ és a $\dfrac{0}{0}$ értékének a tisztázása végett vegyük például a következő két sorozatot: $x_n=a\cdot n$ és $y_n=n$, ahol „a” egy tetszőleges valós szám! Könnyen látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pm\infty,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. A 3. művelet alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\iff a=\dfrac{\infty}{\infty}$ vagyis $\dfrac{\infty}{\infty}=a$ ami azt jelenti, hogy $\dfrac{\infty}{\infty}$ minden valós értéket felvehet. Belátjuk, hogy akár $\pm\infty$ értékeket is felveheti. Legyen ezúttal $x_n=a\cdot n^2$ és $y_n=n$. Ekkor egyfelől $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\ \dfrac{\infty}{\infty}$, másfelől $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\ \lim\limits_{x\to\infty}(a\cdot n)=\pm\infty$, vagyis $\dfrac{\infty}{\infty}=\pm\infty$. Tehát $\dfrac{\infty}{\infty}$ minden értéket felvehet az $\overline{R}=[-\infty,+\infty]$ halmazból. A $\dfrac{0}{0}$ esetet teljesen hasonlóan tárgyalhatjuk, ha például a következő választásokat tesszük: $x_n=\dfrac{a}{n}$ és $y_n=\dfrac{1}{n}$, majd $x_n=\dfrac{a}{n}$ és $y_n=\dfrac{1}{n^2}$. A számolások elvégzését ezúttal az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

(4) A $1^\infty,0^0,\infty^0$ értékeinek a tisztázása már visszavezethető az előző esetekre, például legyenek $(x_n)_{n\geq1},(y_n)_{n\geq1}$ pozitív tagú sorozatok úgy, hogy $L=\lim\limits_{x\to\infty}(x_n)^{y_n}$ ahol $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ és $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. Ha logaritmáljuk mind a két oldalt azt kapjuk, hogy $\lg L=\lim\limits_{n\to\infty}(y_n\cdot\lg x_n)=\ \infty\cdot 0$ és a (2) eset szerint

láttuk, hogy $0 \cdot \infty$ minden értéket felvehet az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból. Ez azt jelenti, hogy $\lg L$ minden értéket felvehet az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból, ahonnan azonnal kapjuk, hogy L minden értéket felvehet a $[0, +\infty]$ halmazból. Ha most $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozatok úgy, hogy $L = \lim\limits_{x\to\infty}(x_n)^{y_n}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ valamint $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, akkor $\lg L = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n \cdot \lg x_n) = 0 \cdot (-\infty) = -0 \cdot \infty$, ami minden értéket felvesz az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból, tehát L minden értéket felvehet a $[0, +\infty]$ halmazból. És végül legyenek $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozatok úgy, hogy $L = \lim\limits_{x\to\infty}(x_n)^{y_n}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ valamint $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Ekkor $\lg L = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n \cdot \lg x_n) = 0 \cdot \infty$ és ez minden értéket felvesz az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból. Ezért L minden értéket felvehet a $[0, +\infty]$ halmazból. Az előbbiekben észrevehettük, hogy $1^\infty, 0^0, \infty^0$ mindegyike csak a $[0, +\infty]$ halmazból vehet fel minden értéket, és nem az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ halmazból. Ez érthető is, hiszen az $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ sorozatok muszáj pozitív tagúak legyenek (gondoljunk csak arra, hogy például nem lehet negatív számot a valós számok halmazán például ½-ik hatványra sem emelni).

Tehát sorra beláttuk, hogy a 7 eset „határozatlansága” abban áll, hogy az illető konkrét feladat függvényében, ami után feloldottuk a határozatlan esetet és kiszámítottuk az illető határértéket, bármilyen értéket kaphatunk az $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ illetve a $[0, +\infty]$ halmazokból.