

# MITŐL FÜGG ÉS MITŐL NEM?

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

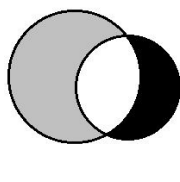
Matematikai versenyeken a következő feladatokkal találkoztam:

**1. Feladat.** Mennyi az 1. ábrán látható szürke és a fekete terület közötti  $K$  különbség, ha a körök sugara 20 illetve 15 egység?

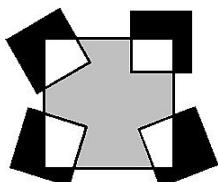
**2. Feladat.** Mennyi a 2. ábrán a szürke terület és a fekete területek összege közötti  $K$  különbség, ha a „kisnégyzetek” oldalhossza 2 cm, a „nagy négyzet” oldalhossza 4 cm?

**3. Feladat.** Mennyi a 3. ábrán látható szürke területek összege és a fekete területek összege közötti  $K$  különbség, ha a négyzetek oldalhossza rendre 11, 9, 7, 5 cm?

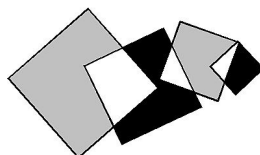
**4. Feladat.** Mennyi a 4. ábrán látható szürke területek összege és a fekete területek összege közötti  $K$  különbség, ha a körök sugara rendre 1, 5, 7, 9, 11 cm?



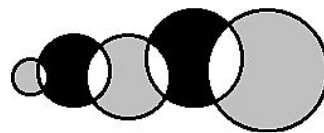
1. ábra



2. ábra



3. ábra

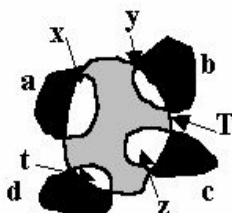


4. ábra

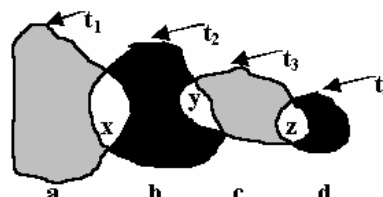
Természetesen merül föl a következő kérdés: az előző feladattípusok csak négyzet és kör esetén fogalmazhatók és oldhatók meg? A továbbiakban belátjuk, hogy az előző feladattípusok megoldása tetszőleges síkbeli összefüggő konvex alakzatok esetén is hasonlóak, egyetlen nehézség az, hogy „szabálytalan” alakzatok területszámolására nincsenek általános képletek. Ezért egy mentő ötletre van szükség. Szerkesszük meg az előző ábrákat általánosabb esetekre:



5. ábra



6. ábra



7. ábra

Kövessük az 5.-7. ábrák jelöléseit, ahol  $a, b, c, d, T, t_1, t_2, t_3, t_4$  rendre a megfelelő szabálytalan alakzatok területeit, továbbá  $x, y, z$  a fehérrel jelölt (fedések) területeit jelöli.

Az 5. ábra esetében:  $K = (a - x) - (b - x) = a - b$ , vagyis a  $K$  különbség csak a két alakzat területének a területétől, sem alakjuktól, sem a közös fedési területtől nem függ!

A 6. ábra esetén  $K = (T - x - y - z - t) - [(a - x) + (b - y) + (c - z) + (d - t)] = T - a - b - c - d$ , vagyis ez esetben is a  $K$  különbség csak az öt alakzat területétől, sem alakjuktól, sem a közös fedési területtől nem függ!

A 7. ábra esetén  $K = [(t_1 + t_3) - (t_2 + t_4)] = \{[(a - x) + (b - x - y)] - [(c - y - z) + (d - z)]\} = b + d - a - c$ , vagyis ezúttal is a  $K$  különbség csak az alakzatok területétől, sem alakjuktól, sem a közös fedési területtől nem függ!

Az elvégzett számolások alapján belátható tehát, hogy a **K** különbség *mindenesetben csak az illető szabálytalan (konvex) alakzatok területétől függ, a fedések területétől nem.*

Ezért, ha az **a, b, c, d, T, t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, t<sub>3</sub>, t<sub>4</sub>**, területekre valamilyen feltételeket vagy számértékeket adunk meg, számos új feladatot kapunk. Továbbá számos új, egészen változatos típusú feladatokat kaphatunk, ha az alakzatok számát, ezek egymáshoz való elhelyezkedési viszonyát különböző félek képpen változtatjuk. A feladatok „álcázás” céljából, az alakzatok akár különböző szabályos alakzatok is lehetnek. Azonnali számolásokkal belátható, hogy az 1.- 4.

feladatokra a K értéke rendre:  $400\pi - 225\pi = 175\pi$  (cm<sup>2</sup>),  $16 - 4 \times 4 = 0$  (cm<sup>2</sup>),

$121 + 49 - 81 - 25 = 64$  (cm<sup>2</sup>),  $1\pi + 49\pi + 121\pi - 25\pi - 81\pi = 65\pi$  (cm<sup>2</sup>).