Az érettségi vizsgára előkészülő tanulók figyelmébe!

EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA A Z_n HALMAZON

4. Az $\begin{cases} \hat{a}_1 x + \hat{b}_1 y = \hat{c}_1 \\ \hat{a}_2 x + \hat{b}_2 y = \hat{c}_2 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása a Z_n halmazon (**2. rész**)

Ebben a részben az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszernek a Z_n halmazon történő megoldási módszerei közül amikor lehet, leghamarabb a helyettesítési módszerrel próbálkozunk. Úgyszintén amikor lehet, a kiküszöbölés módszerét is alkalmazhatjuk de látni fogjuk, hogy mindkét módszernek előnyei és hátrányai is lehetnek, nem beszélve arról, hogy esetenként egyik vagy másik módszer nem is alkalmazható, ilyenkor még más eljárásokat is beiktatunk. Mint ebben, mint a következő részben az egyenletrendszerek megoldása során 2 dolgot figyelünk meg: az egyenletrendszer megoldhatóságát valamint a megoldások számát. És mindezeket sok példa segítségével végezzük el.

A) A helyettesítés módszerének első lépése az, hogy valamelyik egyenletből *kifejezzük* valamelyik ismeretlent. Ellenben ezt csak akkor tudjuk megvalósítani, ha az éppen kifejezendő ismeretlen együtthatója invertálható a Z_n halmazon, ami csak akkor lehetséges, ha ez az együttható relatív prím az n-el. Az inverz elemmel való beszorzás után 3. részben is vázolt számolási eljárásokat követjük, és $\hat{a}\, x = \hat{b}$ illetve $\hat{c}\, y = \hat{d}$ egyenletek megoldásával találjuk szembe magunk.

B) A kiküszöbölés módszere ott kezdődik, hogy pl. az x kiküszöbölése céljából az 1. egyenletet p-vel, a másodikat q-val szorozzuk be ($p, q \in Z_n^*$), úgy, hogy $\hat{a}_1\, p + \hat{a}_2\, q = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}_1\, p = (n - \hat{a}_2)\, q$ legyen, ahonnan pl. $p = (n - \hat{a}_2)$ és $q = \hat{a}_1$ megfelel. Így a két beszorzott egyenletet összeadva egy $\hat{c}\, y = \hat{d}$ alakú egyenletet kapunk. Ha ennek van megoldása, akkor hasonló módon az y kiküszöbölése (vagy az előző y visszahelyettesítése) után egy $\hat{a}\, x = \hat{b}$ egyenlet megoldásához jutunk, és a továbbiakban minél optimálisabb folytatási lehetőségeket keresünk

C) A kifejezési módszer beszorzás után ugyanúgy kezdődik mint az előző módszer, ellenben a $p,\ q \in Z_n$ értékekkel való beszorzás után nem a $\hat{0}$ kialakítására törekszünk, hanem $\hat{1}$ együttható kialakítására (így az illető ismeretlen kifejezhető), vagyis $\hat{a}\, p + \hat{b}\, q = \hat{1}$ alakú egyenletet kell megoldanunk, ami csak az (a, b, n)= 1 esetben eredményez megoldást. Mindezt konkrét gyakorlatok alapján jobban megérthetjük.

D) A zérusosztóval való beszorzás akkor alkalmazható, ha az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ együtthatók valamelyike, vagy egyike sem invertálható. Ilyen esetben úgy szorzunk be egy $\hat{k} \in Z_n$ zérusosztóval, hogy $\hat{k} \cdot \hat{a}_1$, $\hat{k} \cdot \hat{a}_2$, $\hat{k} \cdot \hat{b}_1$, $\hat{k} \cdot \hat{b}_2$ valamelyike (de ne mindegyike!) $\hat{0}$ legyen, így ezáltal a kiküszöbölés módszerénél hamarabb egy $\hat{a}\, x = \hat{b}$ illetve $\hat{c}\, y = \hat{d}$ alakú egyenlet megoldásához jutunk.

E) A Z_n valamelyik invertálható elemével való beszorzást főleg azért alkalmazzuk, hogy a másik egyenlettel olyan lineáris kombinációt állítsunk elő amikor az előző módszerek valamelyike sikeresen alkalmazható.

Előre kihangsúlyozzuk, hogy az egyenletrendszer megoldása az $\hat{a}\,x=\hat{b}$, $\hat{c}\,y=\hat{d}$ vagy $\hat{a}\;x+\hat{b}\,y=\hat{c}$ alakú egyenletek megoldására vezetődik vissza, és ezekről részletesen az 1. illetve 2. részben írtunk (**MatLap 2/2009** illetve **MatLap 3/2009**).

1. Az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ együtthatók mindegyike invertálható a Z_n halmazon

A lényeg jobb áttekinthetősége kedvéért az eszmefuttatásunkat feladatokkal szemléltetjük.

1. példa: Oldjuk meg Z_7-ben a $\hat{2}\,x+\hat{3}\,y=\hat{4}$ és $\hat{4}\,x+\hat{2}\,y=\hat{5}$ egyenletrendszert.

Megoldások: *Első módszer* nyilvánvalóan a helyettesítési módszer, hiszen mind a négy együttható invertálható, ezért bármelyik egyenletből bármelyik ismeretlen kifejezhető. Szorozzuk be az 1. egyenletet pl. $\hat{2}' = \hat{4}$-pal. Mivel (4, 7)= 1, biztosan nem hozunk be idegen gyököt (részletesebben lásd az előző, 3. részben, **MatLap 4/2009**). Ekkor $x+\hat{5}\,y=\hat{2}$ vagyis $x=\hat{2}\,y+\hat{2}$ adódik, amit a 2. egyenletbe helyettesítve, a $\hat{3}\,y=\hat{4}$ egyenlet adódik, és mivel (3, 7)= 1 ezért ennek az egyenletnek egyetlen megoldása van a Z_7-ben, ez *y*= $\hat{6}$, amire $x=\hat{2}\cdot\hat{6}+\hat{2}=\ \hat{0}$. Tehát a feladatnak egyetlen megoldása van a Z_7-ben, és ez éppen a $(\hat{0},\hat{6})$ számpár. *Második módszer*: a kiküszöbölés módszerét próbáljuk alkalmazni, ezért az *y* kiküszöbölése céljából a 2. egyenletet $\hat{2}$-pal szorozva, és az 1. egyenlettel összeadva a $\hat{3}\,x=\hat{0}$ egyenletet kapjuk és mivel (3, 7)= 1, ezért gyökvesztés nélkül $\hat{3}$-pal egyszerűsítve *x*= $\hat{0}$ adódik. Most az *x* kiküszöbölése céljából a $\hat{2}\,p+\hat{4}\,q=\hat{0}\Leftrightarrow\ \hat{2}\,p=\hat{3}\,q$ elérése lenne célszerű, így a $p=\hat{3}$ és $q=\hat{2}$ választás célravezető. Ez egyenletek *p*-vel illetve *q*-val való beszorzása és összegezése után a $\hat{6}\,y=\hat{1}$ egyenlet adódik, és a (6, 7)= 1 alapján egy megoldás van , y= $\hat{6}$ éppen megfelel. *Harmadik módszer:* például a kiküszöbölés módszerévek az *y* kiküszöbölése az előbbiek szerint az *x*= $\hat{0}$ megoldáshoz vezet, és ezt behelyettesítve az egyenletrendszer két egyenletébe, $\hat{3}\,y=\hat{4}$ és $\hat{2}\,y=\hat{5}$ adódik, és mivel (3, 7)= (2, 7)= 1, ezért mindkét egyenletnek 1-1 megoldása van és könnyen belátható hogy y= $\hat{6}$ megfelel. (Ha ezt a kombinált módszert akarjuk alkalmazni, természetesen célszerűbb a könnyebben kiküszöbölhető ismeretlent küszöbölésével kezdeni.)

2.1. példa: Oldjuk meg Z_{25}-ben a $\hat{3}\,x+\hat{2}\,y=\hat{4}$ és $\hat{2}\,x+\hat{3}\,y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Az előbbi megoldási módszerekhez viszonyítva belátható, hogy ezúttal is a helyettesítési módszer a legalkalmasabb. Az 1. egyenletet $\hat{2}' = \widehat{13}$-pal szorozva $\widehat{14}\,x+y=\hat{2}$ vagyis $y=\widehat{11}\,x+\hat{2}$, amit a 2. egyenletbe helyettesítve a $\widehat{10}\,x=\widehat{20}$ egyenlethez jutunk, amiből a (2, 25)= 1 miatt gyökvesztés nélkül $\hat{2}$-pal egyszerűsítve az $\hat{5}\,x=\widehat{10}$ könnyebben megoldható egyenlet adódik. Mivel (5, 25)= 5, ezért a megoldások x= $\hat{2}+\dfrac{\widehat{25\cdot m}}{(5,25)}=\ \widehat{5m+2}$ alakúak, ahol m∈{0, 1, 2, 3, 4}. Tehát x∈{$\hat{2}$, $\hat{7}$, $\widehat{12}$, $\widehat{17}$, $\widehat{22}$} és így az $y=\widehat{11}\,x+\hat{2}$ alapján a megoldáshalmaz M= {($\hat{2};\widehat{24}$), ($\hat{7};\hat{4}$), ($\widehat{12};\hat{9}$), ($\widehat{17};\widehat{14}$), ($\widehat{22};\widehat{19}$)}.

Könnyen belátható, hogy amennyiben a kiküszöbölés módszerével próbálkoztunk volna, úgy a sorra megoldandó $\hat{a}x=\hat{b}$ és $\hat{c}y=\hat{d}$ egyenletek mindegyikének 5-5 megoldása van (hiszen az előbb kaptuk az 5 megoldáspárt), és az 5×5 megoldáspárból az 5 tényleges megoldáspár kiválasztása hosszadalmas, ezért ebben az esetben a kiküszöbölés módszere is hosszadalmas.

2.2. példa: Oldjuk meg Z_{25}-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Az előbb is alkalmazott helyettesítés módszer alapján eljutunk az $y=\hat{11}x+\hat{2}$ egyenlethez, amit a 2. egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $\hat{10}x=\hat{21}$. Mivel (*10, 25*)= 5 | 21 hamis, ezért az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha a kiküszöbölés módszerével akarjuk megoldani, akkor az *x* kiküszöbölése végett az 1. egyenletet *p*-vel, a másodikat *q*-val szorozzuk be úgy, hogy $\hat{3}p+\hat{2}q=\hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}p=\hat{23}q$ legyen, ahol pl. $p=\hat{23}$ és $q=\hat{3}$ megfelel, így a beszorzások nyomán a $\hat{19}x+\hat{21}y=\hat{17}$ és $\hat{6}x+\hat{9}y=\hat{6}$ egyenletek adódnak, amelyek összegezéséből $\hat{5}x=\hat{4}$ aminek nincs megoldása, hiszen (*5, 25*)= 5 | 4 hamis. Az együtthatókban levő szimmetria miatt az *y* kiküszöbölése is pontosan ugyanezeket a számolásokat igényli.

3. példa: Oldjuk meg Z_5-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Az 1. egyenletet $\hat{3}'=\hat{2}$-pal szorozva $x+\hat{4}y=\hat{3}$ vagyis $x=y+\hat{3}$, adódik, ami a 2. egyenlet alapján a $\hat{1}=\hat{2}$ ellentmondáshoz vezet, vagyis az egyenletnek nincs megoldása a Z_5-ben. *Második megoldási módszer* gyanánt könnyen észrevehető, hogy ha összeadjuk a két egyenlet megfelelő oldalait, akkor a $\hat{0}=\hat{1}$ ellentmondást kapjuk.

4. példa: Oldjuk meg Z_5-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Ha ezúttal is összegeznénk a két egyenlet megfelelő oldalait, akkor a $\hat{0}=\hat{0}$ igaz állításhoz jutunk, ami elgondolkoztathat, hogy vajon ez azt jelenti-e, hogy az (x, y) $\in Z_5 \times Z_5$ mind a 25 számpára megoldás lenne? A választ könnyen megkapjuk, ha a helyettesítési módszerrel, az 1. egyenletet ezúttal is $\hat{3}'=\hat{2}$-pal szorozzuk, ahonnan $x+\hat{4}y=\hat{3}$ vagyis $x=y+\hat{3}$ adódik. Amennyiben ezt behelyettesítenénk a 2. egyenletbe, a semmitmondó $\hat{0}=\hat{0}$ állítást kapnánk. Tehát, az egyenletrendszernek valóban minden $y \in Z_5$ megoldása lesz, tehát $y \in \{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4}\}$ ellenben az ezeknek megfelelő x megoldásokat az $x=y+\hat{3}$ összefüggés származtatja, így a megoldáshalmaz M $=\{(\hat{0};\hat{2}), (\hat{1};\hat{3}), (\hat{2};\hat{4}), (\hat{3};\hat{0}), (\hat{4};\hat{4})\}$.

A következő részben majd belátjuk, hogy az előző négy példa, egymástól lényegesen különböző 4 esethez tartozik, ellenben a helyettesítési módszer nem adhat információt ezen 4 típus mibenlétéről, sem a megoldások számáról, de az adott feltételek mellett ezzel a módszerrel az egyenletrendszerek könnyűszerrel megoldhatók.

2. Az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ együtthatók nem mindegyike invertálható a Z_n halmazon

Nyilvánvalóan ezt úgy kell értenünk, hogy az együtthatók között van legalább egy invertálható. Ugyancsak párhuzamba állított feladatokon keresztül szemléltetjük és figyeljük meg, hogy ez a helyzet miben változtatja az előbbi eszmefejtésünket. Természetesen, továbbra is megmarad a helyettesítési módszerrel való *biztos* megoldhatósági lehetőség, hiszen legalább egyik egyenletből, kifejezhető legalább egyik ismeretlen. Ellenben érdemes lenne tudni, hogy milyen más lehetőségek maradnak, vagy adódnak! Folyamatosan erre is választ kapunk!

5. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A Z_8-ban csak a $\hat{3}$ invertálható, így az 1. egyenletet $\hat{3}' = \hat{3}$-pal szorozva, az $x+\hat{6}y=\hat{4} \Leftrightarrow x=\hat{2}y+\hat{4}$ adódik, amit a 2. egyenletbe helyettesítve a $\hat{7}y=\hat{1}$ egyenletet kapjuk, és mivel (7, 8)= 1 ezért az egyenletnek csak egyetlen megoldása van, könnyen belátható, hogy $y=\hat{7}$ megoldás. Erre kapjuk, hogy $x=\hat{2}$, vagyis ebben az esetben is éppen egy megoldásunk van. Vegyük észre, hogy a $\hat{3}$ kivételével a többi együttható mind zérusosztó a Z_8-ban, ezért mindegyikéhez található olyan szám a Z_8-ban, amellyel szorozva $\hat{0}$-pot kapunk. Erre alapozva egy *második megoldási módszer* adódik, ha például az 1. egyenletet beszorozzuk $\hat{4}$-pal (figyelem, a (4, 8)= 4 miatt idegen gyököket is kaphatunk), akkor $\hat{4}x=\hat{0}$ adódik amit gyökveszteség miatt nem egyszerűsíthetjük $\hat{4}$-pal! A (*4, 8*)= *4* alapján az egyenletnek *4* megoldása van, ezek $x=\widehat{\frac{8\cdot m}{(4,8)}}=\widehat{2m}$, ahol m∈{0, 1, 2, 3}, vagyis x ∈{$\hat{0}$, $\hat{2}$, $\hat{4}$, $\hat{6}$}. Az *y* meghatározása céljából máris két lehetőségünk adódik. Az egyik az, hogy ezeket az értékeket rendre visszahelyettesítjük a két egyenletbe. Azonnal belátható, hogy ilymódon elég hosszadalmas megoldani az adódott $\hat{a}y=\hat{b}$ alakú egyenleteket, amelyek száma esetünkben éppen 8. A másik lehetőség az, hogy amennyiben lehet, az egyenletek valamelyikét (akárcsak a megoldás kezdetén) úgy szorozzuk be valamelyik zérusosztóval, hogy ezúttal *x* együtthatója legyen nulla (de az y együtthatója ne legyen nulla). A 2. egyenletet ugyancsak $\hat{4}$-pal szorozva $\hat{4}y=\hat{4}$ adódik, és a (*4, 8*)= *4* alapján ennek az egyenletnek is négy megoldása van, éspedig $y=\widehat{1+\frac{8\cdot m}{(4,8)}}=\widehat{2m+1}$, ahol *m*∈{0, 1, 2, 3}, vagyis *y* ∈{$\hat{1}$, $\hat{3}$, $\hat{5}$, $\hat{7}$}. Nem marad más hátra, mint az, hogy a képezhető 4×4=16 számpárról megállapítsuk, hogy melyek is a megoldások. Ezt leghamarabb az egyenletrendszer egyenleteibe való visszahelyettesítéssel végezhetjük el, és mindenképpen járhatóbb útnak tűnik, mint az előbbi próbálkozás. Ellenben nagyszámú *y* megoldás esetén ez sem rövid eljárás, de például egyszerű számítógépes program alkalmazásával gyorsan ellenőrizhetők, hogy melyek a tényleges megoldások, és melyek jöttek be idegen gyöknek. Esetünkben az egyetlen (*x, y*) megoldás csak a ($\hat{2}$,$\hat{7}$) a többi idegen gyök.

6.1. példa: Oldjuk meg Z_{10}-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Ezúttal is a Z_{10}-ben is csak a $\hat{3}$ az invertálható, így az 1. egyenletet $\hat{3}' = \hat{7}$-pal szorozva $x+\hat{4}y=\hat{8} \Leftrightarrow x=\hat{6}y+\hat{8}$ adódik, amit a 2. egyenletbe helyettesítve a $\hat{5}y=\hat{5}$ egyenletet kapjuk, aminek (*5, 10*)= *5* megoldása van $y=\widehat{2m+1}$ ahol *m*∈{0, 1, 2, 3, 5}.Az $x=\hat{6}y+\hat{8}$ összefüggés alapján a megoldáshalmaz M= {($\hat{0}$;$\hat{1}$), ($\hat{2}$;$\hat{9}$), ($\hat{4}$;$\hat{7}$), ($\hat{6}$;$\hat{3}$), ($\hat{8}$;$\hat{5}$)}.

Egy *második módszerként*, amennyiben összeadjuk a két egyenletet az $\hat{5}z=\hat{5}$ alakú egyenlet adódik (z= x+ y) amelynek a megoldásai z= x+ y= $2\hat{m}+1$, és $m\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, így az x= $2\hat{m}+1$- y visszahelyettesíthető valamelyik eredeti egyenletbe ahonnan a már felsorolt 5 megoldáspárt kapjuk. Természetesen a **B) – E)** módszerek mindegyike többé vagy kevésbé hosszabb számolások után szintén megoldáshoz vezetnek.

6.2. példa: Oldjuk meg Z_{10}-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A két egyenletet összeadva az $\hat{5}(x+y)=\hat{6}\Leftrightarrow \hat{5}z=\hat{6}$ adódik (z= x+ y), és mivel (5, 10)=5 | 6 hamis állítás, ezért az egyenletnek, és így az egyenletrendszernek sincs megoldása. *Második módszer*: a Z_{10} invertálható elemei $\hat{3}$, $\hat{7}$ és $\hat{9}$, így az 1. egyenletet $\hat{3}' = \hat{7}$-pal szorozva $x+\hat{4}y=\hat{8}\Leftrightarrow\ x=\hat{2}y+\hat{8}$ amit a 2. egyenletbe helyettesítve $\hat{7}y=\hat{6}$ adódik, és a *(7, 10)*= *1* alapján egyetlen megoldás van, és y = $\hat{8}$ megfelel, amit az 1. egyenletbe visszaírva $\hat{3}x=\hat{8}$ adódik, és a *(3, 10)*= 1 alapján 1 megoldása van, és x = $\hat{6}$ megfelel, de a ($\hat{6}$, $\hat{8}$) nem elégítik ki az 2. egyenletet. Belátható, hogy ha a 2 egyenlet mindegyikét az $\hat{5}$ zérusosztóval szoroznánk be, akkor az $\hat{5}x=\hat{0}$ és $\hat{5}y=\hat{0}$ egyenletekhez jutnánk, amelyeknek az (*5, 10*)= 5 alapján 5-5 megoldása van, és ezek leellenőrzése eléggé hosszadalmas.

7. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{6}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Mivel a Z_8-ban az invertálható elemek $\hat{3}$, $\hat{5}$ és $\hat{7}$, ha az 1. egyenletet $\hat{3}'$ = $\hat{3}$-pal szorozzuk, $\hat{6}x+y=\hat{6}\Leftrightarrow\ \ y=\hat{2}x+\hat{6}$ adódik, ami a 2. egyenlet alapján a $\hat{0}$= $\hat{2}$ ellentmondáshoz vezet. *Második módszer*: a két egyenletet összegezve $\hat{6}x+\hat{5}y=\hat{0}\ \Leftrightarrow\hat{5}y=\hat{2}x$ adódik amit $\hat{5}' = \hat{5}$-pal beszorozva y=$\hat{2}x$, amit behelyettesítve az 2. egyenletbe $\hat{0}$= $\hat{6}$ ellentmondás adódik (az 1. egyenletbe helyettesítve csak $\hat{0}=\hat{0}$ azonosság adódna). *Harmadik módszer*: ha az egyenleteket rendre a $\hat{4}$ zérusosztóval szorozzuk a két egyenletből $\hat{4}y=\hat{0}$ és $\hat{0}=\hat{0}$ adódik, és a (4, 8)= 4 alapján négy y megoldás van, ezek $y\in$ {$\hat{0}$, $\hat{2}$, $\hat{4}$, $\hat{6}$} amelyeket visszaírva a két egyenletbe a következő egyenletpárokat kapjuk: ($\hat{2}x=\hat{2}$ és $\hat{4}x=\hat{6}$), ($\hat{2}x=\hat{4}$ és $\hat{4}x=\hat{2}$), ($\hat{2}x=\hat{6}$ és $\hat{4}x=\hat{6}$), ($\hat{2}x=\hat{0}$ és $\hat{4}x=\hat{2}$). A (4, 8)= 4 és 4 | 6 illetve 4 | 2 hamis állítások alapján a $\hat{4}x=\hat{6}$ illetve $\hat{4}x=\hat{2}$ egyenleteknek nincs megoldásuk a Z_8-ban.

8. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{6}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Mivel a Z_8-ban az invertálható elemek $\hat{3}$, $\hat{5}$ és $\hat{7}$, ha az 1. egyenletet $\hat{3}'$ = $\hat{3}$-pal szorozzuk, $\hat{6}x+y=\hat{3}\Leftrightarrow\ y=\hat{2}x+\hat{3}$ adódik, ami a 2. egyenlet alapján a $\hat{0}$= $\hat{0}$ adódik. Tehát $x\in$ Z_8 és az $y=\hat{2}x+\hat{6}$ alapján M={($\hat{0}$;$\hat{3}$), ($\hat{1}$;$\hat{5}$), ($\hat{2}$;$\hat{7}$), ($\hat{3}$;$\hat{1}$), ($\hat{4}$;$\hat{3}$), ($\hat{5}$,$\hat{5}$),($\hat{6}$,$\hat{7}$), ($\hat{7}$,$\hat{1}$) }. *Második módszer*: az 1. egyenletet $\hat{4}$ zérusosztóval szorozva a $\hat{4}y=\hat{4}$ egyenletet kapjuk, amelynek a (4, 8)= 4 alapján négy megoldása van, ezek y= $2\hat{m}+1$, ahol $m\in\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$. Ha visszahelyettesítjük az egyenletrendszerbe, onnan megkapjuk az x megoldásokat is, minden y

megoldás esetén éppen két x megoldást. *Harmadik módszer* gyanánt vegyük észre, hogy az egyenletek bármelyikét az $\hat{5}$ vagy $\hat{7}$ invertálható elemekkel beszorozva az $\hat{5}\cdot\hat{3}=\hat{7}$ illetve az $\hat{7}\cdot\hat{3}=\hat{5}$ alapján invertálható együtthatókat kapunk, így alkalmazható a helyettesítési módszer.
Megjegyzés: ha valamelyik egyenletben az x együtthatója, a másik egyenletben pedig az y együtthatója invertálható, akkor a helyettesítési módszer a legalkalmasabb megoldási módszer!

3. Az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ együtthatók egyike sem invertálható a Z_n halmazon

Ebben az esetben „indulásból” nem alkalmazhatjuk a helyettesítési módszert, de a **B) – E)** módszerek bármelyikével próbálkozhatunk (vigyázat, mert esetenként a beszorzásokból adódó idegen gyököket ki kell szűrnünk!). Sok esetben ha a kiküszöbölés módszerével próbálkozunk, akkor esetenként egy zérusosztóval való beszorzást miatt idegen gyökök kerülhetnek be, vagy hosszas számolások aódhatnak, na meg $\hat{0}=\hat{0}$ semmitmondó (használhatatlan) azonosságot is kaphatunk.

9. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A kiküszöbölés módszerének (ezúttal a **D)** módszer) alkalmazása céljából ha az 1. egyenletet $\hat{3}$-pal szorozzuk akkor $\hat{3}x=\hat{0}$ egyenlet adódik, ha pedig $\hat{2}$-pal szoroznánk, akkor a $\hat{4}y=\hat{2}$ egyenlet adódik. Az elsőnek (3,6)= 3, a másodiknak (2,6)= 2 megoldása van, és ezek $x\in\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$, illetve $y\in\{\hat{2}, \hat{5}\}$, és a 6 számpárból csak a $(\hat{2},\hat{5})$ megoldás, a többi idegen megoldás. *Második módszer*: Az első egyenletet az $\hat{5}$ invertálható elemmel beszorozva a $\hat{3}x+\hat{4}y=\hat{2}$ egyenlet adódik, amit a 2. egyenlettel összeadva az $\hat{5}x+y=\hat{3}$ adja, ahonnan bármelyik ismeretlen kifejezhető, az optimálisabb kifejezés az $y=x+\hat{3}$ amit az 1. egyenletbe visszahelyettesítve az $\hat{5}\cdot x=\hat{4}$ egyenletet adja és az (5, 6)= 1 alapján egyetlen megoldása van, x= $\hat{2}$ éppen megfelel, és erre y= $\hat{5}$. Ez a megoldás esetünkben rövidebb mint az előbbi.

10.1. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{3}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{4}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A két egyenletet összeadva az $\hat{5}\cdot y=\hat{1}$ egyenlet adódik, az (5, 6)= 1 alapján egyetlen megoldása van, y= $\hat{5}$ megfelel, amit ha visszaírunk a két egyenletbe $\hat{2}x=\hat{0}$ és $\hat{4}x=\hat{0}$ adódik, és ahonnan $x=\hat{0}$ és $x=\hat{3}$, ezért a megoldáshalmaz M= $\{(\hat{0},\hat{5});(\hat{3},\hat{5})\}$. *Második módszer*: Az 1. egyenletet az $\hat{5}$ invertálható elemmel, a másodikat a $\hat{2}$ zérusosztóval szorozva és összegezve $y=\hat{5}$ adódik, amit visszahelyettesítve a két egyenletbe, az előző megoldásokat kapjuk. *Harmadik módszer* gyanánt, ha a $\hat{2}$ vagy a $\hat{3}$ zérusosztókkal szorzunk, akkor $\hat{a}x=\hat{b}$ illetve $\hat{c}y=\hat{d}$ alakú egyenleteket kapunk, ezeket megoldva csak az előző két számpár felel meg.

10.2. példa: Oldjuk meg Z_{12}-ban a $\hat{9}x+\hat{2}y=\hat{3}$ és $\hat{3}x+\hat{4}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A két egyenletet összeadva a $\hat{6}\cdot y=\hat{5}$ egyenlet adódik aminek a (6, 12)= $6 \mid 1$ hamis állítás alapján nincs megoldása. *Második módszer*: invertálható elemekkel szorzunk be. Ha az 1. egyenletet $\hat{7}$-pal szorozzuk és ezt kivonjuk a 2. egyenletből, akkor a $\hat{2}y=\hat{5}$ egyenlet kapjuk, aminek a (2, 12)= 2 $\nmid$ 5 hamis állítás alapján nincs megoldása. Úgyszintén ha a 2. egyenletet $\hat{5}$-pal szorozzuk és az 1. egyenlettel összegezzük, akkor a $\hat{10}\,y=\hat{1}$ egyenlet adódik, aminek a (*10, 12*)= *2* $\nmid$ *1* hamis állítás alapján szintén nincs megoldása.

11. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{2}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A két egyenlet összegezése a $\hat{0}=\hat{4}$ hamis állítást adja, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ellenben a C) módszer nem alkalmazható sikerrel, mert a $\hat{2}p+\hat{4}q=\hat{1}$ illetve $\hat{4}p+\hat{2}q=\hat{1}$ egyenleteknek a (2, 4, 6)= 2 $\nmid$ 1 hamis állítás alapján nincs megoldásuk. A $\hat{3}$ zérusosztóval való beszorzás a $\hat{0}=\hat{0}$ semmitmondó azonossághoz vezet, így ez a próbálkozás sem válik be. Ellenben ha akár az 1. egyenletet, akár a 2. egyenletet az $\hat{5}$ szimmetrizálható elemmel szorozzuk a másik egyenlettel együtt a $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{10}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{2}$ alapján a $\hat{10}=\hat{2}$ ellentmondást adja, a második esetben pedig a $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{10}$ és $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{2}$ alapján úgyszintén a $\hat{10}=\hat{2}$ ellentmondás adódik. Ha jól megfigyeljük, akkor az ellentmondás innen adódik: $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{5}\cdot(\hat{4}x+\hat{2}y)$ vagy $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{5}\cdot(\hat{2}x+\hat{4}y)$ és $\hat{5}\cdot\hat{2}=\hat{4}\neq\hat{2}$.

12. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{4}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

Megoldás: A két egyenlet összegezése ezúttal a semmitmondó $\hat{0}=\hat{0}$ azonossághoz vezet. Úgyszintén, az előbbi számolások alapján sem a C) módszer, sem a $\hat{3}$ zérusosztóval való beszorzás nem vezet eredményre. Ellenben az $\hat{5}$-pal való beszorzás alapján rájövünk, hogy $\hat{5}(\hat{2}x+\hat{4}y-\hat{4})=\hat{4}x+\hat{2}y-\hat{2}$ sőt mi több „fordítva" is igaz, vagyis $\hat{5}(\hat{4}x+\hat{2}y-\hat{2})=\hat{2}x+\hat{4}y-\hat{4}$. Akármelyik változatra is figyelünk az következik, hogy egyik egyenlet a másik egyenletnek a $\hat{4}$-pal való beszorzottja, ezért a megoldandó egyenletrendszer pl. $\hat{2}x+\hat{4}y-\hat{2}=\hat{0}$ és $\hat{5}\cdot(\hat{2}x+\hat{4}y-\hat{2})=\hat{0}$ és az (*5, 6*)= 1 alapján gyökvesztés nélkül egyszerűsíthetünk $\hat{5}$-pal. Ebből kifolyólag a megoldandó egyenletrendszer egyetlen egyenletből áll, a $\hat{2}x+\hat{4}y-\hat{2}=\hat{0}\Leftrightarrow\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{4}$ egyenletből. A feladatot és a részletes megoldását a 2. részben megtaláljuk (**MatLap 3/2009, 5. példa**).

Az előbbiekben bemutatott, nagyszámú példák segítségével szemléltetett helyettesítési, kiküszöbölési vagy éppen más módszerek nagyon kevés esetben engednek következtetni a kezdetben felvetett 2 kérdésünk megválaszolására: az egyenletrendszer megoldhatóságára valamint a megoldások számára. De mindezek ellenére a megoldási módszerek (az illető feltételek mellett) mindig eredményre vezettek, vagyis gyakorlati szempontból fontos az a tény, hogy ezekkel a módszerekkel megoldhatjuk a feladatokat (de előfordulhat, hogy esetenként hosszasabb számolásokba kell bocsátkoznunk). Éppen ezért természetes az az elvárás, hogy a megoldási eljárások mellett, a feltett két kérdésre is választ kapjunk, na meg a áttekinthetőbb, rövidebb módszerek után kutassunk, és ezáltal átfogóbban, teljességében láthassuk a kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldását. Erre a következő részben bemutatásra kerülő, determinánsok segítségével történő megoldás ad kielégítő választ.