Az érettségi vizsgára előkészülő tanulók figyelmébe!

EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA A Z_n HALMAZON

5. Az $\begin{cases} \hat{a}_1 x + \hat{b}_1 y = \hat{c}_1 \\ \hat{a}_2 x + \hat{b}_2 y = \hat{c}_2 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása a Z_n halmazon (**3. rész**)

A hivatkozások könnyítése céljából a címben szereplő egyenletrendszert jelöljük (E)-vel.
Ebben a részben az (E) egyenletrendszer megoldását a determinánsok módszerével mutatjuk be.
A következőkben a kiküszöbölés módszernek a lépéseit követve, így járunk el:

Az (E) egyenletrendszer első egyenletét $\hat{b}_2$ -pal, a második egyenletet (- $\hat{b}_1$)-pal szorozva és az így adódott egyenleteket összeadva kapjuk, hogy: $(\hat{a}_1\cdot\hat{b}_2-\hat{a}_2\cdot\hat{b}_1)\cdot x=(\hat{b}_1\cdot\hat{c}_2-\hat{b}_2\cdot\hat{c}_1)$ (i)

Hasonlóan $\hat{a}_2$ -vel illetve (- $\hat{a}_1$)-el szorozva kapjuk, hogy $(\hat{a}_1\cdot\hat{b}_2-\hat{a}_2\cdot\hat{b}_1)\cdot y=(\hat{c}_1\cdot\hat{a}_2-\hat{c}_2\cdot\hat{a}_1)$ (ii).
Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\hat{\Delta}=\hat{a}_1\cdot\hat{b}_2-\hat{a}_2\cdot\hat{b}_1,\ \hat{\Delta}_x=\hat{b}_1\cdot\hat{c}_2-\hat{b}_2\cdot\hat{c}_1,\ \hat{\Delta}_y=\hat{c}_1\cdot\hat{a}_2-\hat{c}_2\cdot\hat{a}_1 \quad \text{(iii)}$$

Ezekkel a jelölésekkel az (i) és (ii) egyenletek a következők: $\hat{\Delta}\cdot x=\hat{\Delta}_x$ és $\hat{\Delta}\cdot y=\hat{\Delta}_y$ (i-ii).

Máris kihangsúlyozzuk, hogy a számolások során nem zártuk ki a $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}_x$, $\hat{\Delta}_y\in\{0\}$ lehetőséget sem (tehát ezek előfordulását is letárgyaljuk) , továbbá a $\hat{b}_2$, - $\hat{b}_1$, $\hat{a}_2$, - $\hat{a}_1$ számokkal való „beszorzás" miatt a 3. részben leírtak alapján (**MatLap 4/2009**) idegen gyököket is kaphatunk, tehát a továbbiakban ezt is szem előtt kell tartanunk.

Az (i-ii) egyenletek $\hat{a}\cdot z=\hat{b}$ alakú egyenletek amelynek a megoldásáról részletesen az 1. részben írtunk (**MatLap 2/2009**) ahol láttuk, hogy a megoldhatóság az (a, n)= d | b feltételtől függ, ezért a szóbanforgó egyenletrendszer megoldását a következő esetekre bontjuk le:

<u>I. eset</u>: $\hat{\Delta}\neq\hat{0}$, és ennek keretén belül: 1) Ha (Δ, n)= 1 illetve 2) Ha (Δ, n)= d$\neq$ 1

<u>II. eset</u>: $\hat{\Delta}=\hat{0}$, és ennek keretén belül: 1) Ha $\hat{\Delta}_x\cdot\hat{\Delta}_y\neq\hat{0}$ illetve 2) Ha $\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$

A továbbiakban tehát az (E) egyenletrendszer megoldását négy esetben kell vizsgálnunk. A könnyebb áttekinthetőség és a jobb érthetőség végett mindezt példák segítségével szemléltetjük. Ezeket és a példák sorszámát is az előző 4. részből vesszük át (**MatLap 5/2009**).

<u>I.1) eset</u>: $\hat{\Delta}\neq\hat{0}$ és (Δ, n)= 1

9. tétel. A (Δ, n)= 1 feltétel mellett az (E) egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van (vagyis kompatibilis és határozott) és a megoldásokat az $x=\hat{\Delta}_x\cdot\hat{\Delta}'$ és $y=\hat{\Delta}_y\cdot\hat{\Delta}'$ képletekkel kapjuk meg, a $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}_x$, $\hat{\Delta}_y$ értékei az (iii) összefüggéssel számíthatók ki, ahol $\hat{\Delta}'$ a $\hat{\Delta}$ inverze.

Bizonyítás: Legyen (x_0, y_0) az (E) egyenletrendszer egy megoldása (ha van). Az előbbiekben leírt kiküszöbölési módszerre épülő számolások alapján ezek az értékek teljesítik az (i-ii) egyenletrendszert is, vagyis $\hat{\Delta}\cdot x_0=\hat{\Delta}_{x_0}$ és $\hat{\Delta}\cdot y_0=\hat{\Delta}_{y_0}$. Az 1. részben bemutatott **1. tétel** alapján, mivel (Δ, n)= 1 (ami azt jelenti, hogy Δ invertálható a Z_n-ben) , ezért ez utóbbi két egyenlet mindegyikének pontosan egy-egy megoldás van, és ezek: $x_0=\hat{\Delta}_{x_0}\cdot\hat{\Delta}'$ és $y_0=\hat{\Delta}_{y_0}\cdot\hat{\Delta}'$.

Mivel az (E) egyenletrendszerből az (i-ii) egyenletrendszerhez úgy jutottunk el, hogy egyenleteket „beszoroztunk”, ezért a 3. részben leírtak alapján idegen gyököket hozhattunk be, tehát lehetséges, hogy az előző képlettel kiszámított (x_0, y_0) megoldás éppen idegen gyök. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy ezek az értékek teljesítik az eredeti (E) egyenletrendszert, ami azt jelenti, hogy az így kapott megoldás nem idegen gyök, hanem tényleges megoldás. Valóban, rendre felírhatók a következő számolások: $\hat{a}_1 x_0 + \hat{b}_1 y_0 = \hat{a}_1 \cdot \hat{\Delta}_{x_0} \cdot \hat{\Delta}' + \hat{b}_1 \cdot \hat{\Delta}_{y_0} \cdot \hat{\Delta}'$ = $= \hat{a}_1 \cdot \hat{\Delta}'(\hat{c}_1 \cdot \hat{b}_2 - \hat{c}_2 \cdot \hat{b}_1) + \hat{b}_1 \cdot \hat{\Delta}'(\hat{a}_1 \cdot \hat{c}_2 - \hat{c}_1 \cdot \hat{a}_2) = (\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1) \cdot \hat{\Delta}' \cdot \hat{c}_1 + \hat{\Delta}' \cdot (\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_1 \cdot \hat{c}_1 - \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_2 \cdot \hat{c}_2)$ = $= (\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1) \cdot \hat{\Delta}' \cdot \hat{c}_1 + \hat{0} = \hat{\Delta} \cdot \hat{\Delta}' \cdot \hat{c}_1 = \hat{c}_1$. Teljesen hasonlóan bizonyítjuk, hogy az előbbi (x_0, y_0) megoldás teljesíti az (E) egyenletrendszer második egyenletét is. Tehát az $x_0 = \hat{\Delta}_{x_0} \cdot \hat{\Delta}'$ és $y_0 = \hat{\Delta}_{y_0} \cdot \hat{\Delta}'$ megoldások az (E) egyenletrendszernek egyetlen megoldása, vagyis a (Δ, n)= 1 feltétellel, az (E) egyenletrendszer ú.n. Cramer egyenletrendszer, kompatibilis és határozott.

Megjegyzések:

1) Vezessük be a következő jelöléseket: A= $\begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 & \hat{b}_2 \end{bmatrix}$, X= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}$. Így az (E) egyenletrendszer mátrixegyenlet alakja *A·X= B*.

Mivel det(A)= $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$, ezért az A mátrix invertálható (legyen az inverz mártixa A'), akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A' \cdot B = (\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1)' \cdot \begin{bmatrix} \hat{b}_2 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 \end{bmatrix} \cdot B = (\hat{a}_1 \cdot \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \cdot \hat{b}_1)' \cdot \begin{bmatrix} \hat{b}_2 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}_x \cdot \hat{\Delta}' \\ \hat{\Delta}_y \cdot \hat{\Delta}' \end{bmatrix}$$

ahonnan a mátrixok egyenlősége alapján $x = \hat{\Delta}_x \cdot \hat{\Delta}'$ és $y = \hat{\Delta}_y \cdot \hat{\Delta}'$ adódik, vagyis éppen a már kapott eredmény. A (Δ, n)= 1 feltételre itt is szükség volt, mivel éppen az utóbbi mátrixban a $\hat{\Delta}'$ is bejön a számolásokba (hiszen a Z_n-ben számolunk, ahol csak „+” és „ ·” műveletek vannak). Ez a bizonyítás, az előbbi tétel egy második bizonyítását képezi.

2) Az éppen bemutatott megoldási módszer, a $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$ és (Δ, n)= 1 feltételek mellett, *m* egyenletből álló és *m* ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer esetén is ugyanígy alkalmazható a Z_n-ben , és a rendszer ezúttal is kompatibilis és határozott, vagyis Cramer egyenletrendszer (v.ö. [6] és [7]).

3) A $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$ és (Δ, n)= 1 feltételek mellett, mint az (E) egyenletrendszert, mint az *m* egyenletből álló *m* ismeretlenes lineáris egyenletrendszert a tankönyvekben is leírt,a mátrixok „átalakításán” (elemi transzfotmációkon) alapuló Gauss-féle módszerrel is megoldhatjuk (v.ö. [6]).

1. példa: Oldjuk meg Z_7-ben a $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{4}$ és $\hat{4}x + \hat{2}y = \hat{5}$ egyenletrendszert.

5. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4}$ és $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1}$ egyenletrendszert.

9. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4}$ és $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1}$ egyenletrendszert.

A felsorolt három példa lényegében csak abban különbözik egymástól, hogy az első esetben minden együttható invertálható, a második esetben csak bizonyos együtthatók invertálhatók, a harmadik esetben pedig egyik együttható sem invertálható az illető (Z_n,+,.)–ben.

Az előző részben láthattuk, hogy mind a három példa esetén *pontosan egyetlen* (x, y) *megoldás* létezett. Erre a magyarázat az, hogy mindhárom esetben $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$ és $(\Delta, n) = 1$, ezért a **9. tétel** értelmében Cramer-típusú, kompatibilis és határozott egyenletrendszerről van szó, amelynek megoldásait az (i-ii) összefüggések származtatják.

Az 1. példa esetén $\hat{\Delta} = \hat{6}$ és (6, 7)= 1 ezért létezik és $\hat{\Delta}' = \hat{6}$, így $x = \hat{\Delta}_x \cdot \hat{\Delta}' = \hat{0} \cdot \hat{6} = \hat{0}$ és $y = \hat{\Delta}_y \cdot \hat{\Delta}' = \hat{1} \cdot \hat{6} = \hat{6}$. Az 5. példa esetén $\hat{\Delta} = \hat{5}$ és (5, 8)= 1 ezért $\hat{\Delta}' = \hat{5}$ és az $x = \hat{\Delta}_x \cdot \hat{\Delta}'$ illetve $y = \hat{\Delta}_y \cdot \hat{\Delta}'$ összefüggések alapján $x = \hat{2}$ és $y = \hat{7}$ adódik. A 9. példa esetén $\hat{\Delta} = \hat{5}$ és (*5,6*)= 1 ezért $\hat{\Delta}' = \hat{5}$ és $x = \hat{2}$ és $y = \hat{5}$ adódik.

<u>I.2) eset</u>: $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$ és $(\Delta, n) = d \neq 1$

Eben az esetben a $(\Delta, n) = d \neq 1$ miatt $\hat{\Delta}$ nem invertálható a Z_n-ben, tehát az előbbiekben bemutatott 2 módszer egyike sem alkalmazható. Ellenben, az 1. részben bizonyított **1. tétel** alapján, az $\hat{\Delta} \cdot x = \hat{\Delta}_x$ és $\hat{\Delta} \cdot y = \hat{\Delta}_y$ (i-ii) egyenletek megoldásáról a következőket fogalmazhatjuk meg:

a) Amennyiben a $d = (\Delta, n) \mid \Delta_x$ vagy $d = (\Delta, n) \mid \Delta_y$ valamelyike (vagy mindkettő) hamis, akkor az (i-ii) egyenletek valamelyikének nincs megoldása Z_n-ben, így az (E) egyenletrendszer sem oldható meg a Z_n-ben.

2.2. példa: Oldjuk meg Z_{25}-ben a $\hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4}$ és $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2}$ egyenletrendszert.

6.2. példa: Oldjuk meg Z_{10}-ben a $\hat{3}x + \hat{2}y = \hat{4}$ és $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2}$ egyenletrendszert.

10.2. példa: Oldjuk meg Z_{12}-ban a $\hat{9}x + \hat{2}y = \hat{3}$ és $\hat{3}x + \hat{4}y = \hat{2}$ egyenletrendszert.

A felsorolt három példa lényegében csak abban különbözik egymástól, hogy az első esetben minden együttható invertálható, a második esetben csak bizonyos együtthatók invertálhatók, a harmadik esetben pedig egyik együttható sem invertálható az illető $(Z_n, +, .)$–ben.

Az előző részben láttuk, hogy a egyik egyenletrendszernek sem volt megoldása. Ezt azonnal beláthatjuk, hiszen számolásokkal könnyen meggyőződhetünk arról, hogy mind a három esetben $\hat{\Delta} \neq \hat{0}$ és $(\Delta, n) = d \neq 1$ is fennáll, de ugyanakkor a $d \mid \Delta_x$ és $d \mid \Delta_y$ nem mindegyike igaz. Ennek ellenőrzését az érdeklődő Olvasó könnyen elvégezheti.

b) Amennyiben a $d = (\Delta, n) \mid \Delta_x$ és $d = (\Delta, n) \mid \Delta_y$ igaz állítások, úgy mind a két egyenlet megoldható Z_n-ben, és az egyenletek mindegyikének éppen d számú megoldása van, de ez nem jelenti azt, hogy az (E) egyenletrendszernek $d \times d$ számú megoldása van, ugyanis a kiküszöbölés során, ahogyan az (i-ii) egyenletekhez jutottunk, a beszorzások során idegen gyököket hozhattunk be amiknek száma az n modulótól függ.

Gyakorlatilag így járunk el: megoldjuk a $\hat{\Delta} \cdot x = \hat{\Delta}_x$ és $\hat{\Delta} \cdot y = \hat{\Delta}_y$ és egyenleteket úgy, ahogyan az 1. rész **1. tételében** olvashatjuk, vagyis a megoldások a következők:

$x = x_0 + \dfrac{\widehat{pn}}{d}$, $y = y_0 + \dfrac{\widehat{qn}}{d}$ ahol $d = (\Delta, n) \neq 1$ és $p, q \in \{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$, továbbá x_0 és y_0 az egyenleteknek egy-egy sajátos megoldása.

Ezeket a megoldásokat visszahelyettesítjük az (E) egyenletrendszerbe és így eldönthetjük, melyek az idegen gyökök, és melyek a tényleges megoldások.

2.1. példa: Oldjuk meg Z_{25}-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

6.1. példa: Oldjuk meg Z_{10}-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

10.1. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{3}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{4}$ egyenletrendszert

A felsorolt három példa lényegében csak abban különbözik egymástól, hogy az első esetben minden együttható invertálható, a második esetben csak bizonyos együtthatók invertálhatók, a harmadik esetben pedig egyik együttható sem invertálható az illető (Z_n,+,.)–ben.

Az előző részben láttuk, hogy a három egyenletrendszer megoldásainak a száma rendre 5 (a Z_{25}-ben), 5 (a Z_{10}-ben) illetve 2 (a Z_6-ban). A $\hat{\Delta}\cdot x=\hat{\Delta}_x$ és $\hat{\Delta}\cdot y=\hat{\Delta}_y$ egyenletpárok ezen három példa esetén rendre a következők: ($\hat{5}\cdot x=\hat{10}$ és $\hat{5}\cdot y=\hat{20}$ a Z_{25}-ben), ($\hat{5}\cdot x=\hat{0}$ és $\hat{5}\cdot y=\hat{5}$ a Z_{10}-ben), ($\hat{4}\cdot x=\hat{0}$ és $\hat{4}\cdot y=\hat{2}$ a Z_6-ban). Belátható, hogy mind a három esetben teljesülnek a megoldás létezéséhez szükséges d= $(\Delta$, n) $\mid \Delta_x$ és d= $(\Delta$, n) $\mid \Delta_y$ feltételek. Mindenesetben egy-egy $\hat{a}x=\hat{b}$ illetve $\hat{c}y=\hat{d}$ alakú egyenletet kell megoldanunk amiről az 1. részben olvashatunk (**MatLap 2/2009**). A megoldás kellemetlenebb részét ellenben az képezi, hogy mindhárom feladat esetén *külön-külön* kapjuk meg az *x* illetve *y* megoldásokat (nem pedig egy *x* és *y* közötti összefüggés nyomán, mint például a helyettesítési módszer esetén) és ellenőrizni kell, hogy mely (*x, y*) számpár elégíti ki az egyenletrendszert, hiszen a módszernél használt beszorzások során idegen gyökök is bekerülhetek. (Az Olvasó erről könnyen meggyőződhet, ha megoldja ez előző három egyenletpárt). Általában az ellenőrzési folyamat hosszadalmas szokott lenni, ezért ha egy megoldandó feladat éppen ebbe a típusba tartozik, akkor gyakorlati szempontból érdemes előbb egy másik, nem a determinánsokon alapuló megoldással próbálkozni (lást a 4. részben, **MatLap 5/2009**), mert a megoldások számát előre nem mindig határozhatjuk meg.

II.1) eset: $\hat{\Delta}=\hat{0}$ és $\hat{\Delta}_x\cdot\hat{\Delta}_y\neq\hat{0}$

Ebben az esetben a $\hat{\Delta}\cdot x=\hat{\Delta}_x$ és $\hat{\Delta}\cdot y=\hat{\Delta}_y$ (i-ii) egyenletek $\hat{0}\cdot x=\hat{\Delta}_x$ és $\hat{0}\cdot y=\hat{\Delta}_y$ alakot öltik, és amennyiben a $\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$ feltétel nem teljesül (márpedig $\hat{\Delta}_x\cdot\hat{\Delta}_y\neq\hat{0}$), úgy egy $\hat{0}=\hat{a}\neq\hat{0}$ ellentmondáshoz jutunk, tehát ebben az esetben sem az (i-ii) egyenletrendszernek és ebből kifolyólag az (E) egyenletrendszernek sincs megoldása a Z_n-ben.

3. példa: Oldjuk meg Z_5-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

7. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{2}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{6}$ egyenletrendszert.

11. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{2}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

A felsorolt három példa lényegében csak abban különbözik egymástól, hogy az első esetben minden együttható invertálható, a második esetben csak bizonyos együtthatók invertálhatók, a harmadik esetben pedig egyik együttható sem invertálható az illető (Z_n,+,.)–ben.

Az előző részben láttuk, hogy a egyik egyenletrendszernek sem volt megoldása. Ezt azonnal beláthatjuk, hiszen számolásokkal könnyen meggyőződhetünk arról, hogy mindhárom esetben $\hat{\Delta}=\hat{0}$ és ugyanakkor $\hat{\Delta}_x\cdot\hat{\Delta}_y\neq\hat{0}$. Az egyszerű számolások elvégzését az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

II.2) eset: $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$

Ebben az esetben tehát fennállnak a következő összefüggések:

$$\hat{a}_1\cdot\hat{b}_2=\hat{a}_2\cdot\hat{b}_1\ (1),\ \hat{b}_1\cdot\hat{c}_2=\hat{b}_2\cdot\hat{c}_1\ (2),\ \hat{c}_1\cdot\hat{a}_2=\hat{c}_2\cdot\hat{a}_1\ (3)$$

Ilyen feltételek mellett a következő általános érvényű eredményt fogalmazzuk meg:

10. tétel. Amennyiben a megoldandó (E) egyenletrendszer esetén $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$, továbbá az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ számok közül legalább egyik invertálható a Z_n-ben, akkor létezik vagy olyan $\hat{p}\in Z_n^*$ szám amelyre $\hat{a}_1=\hat{p}\cdot\hat{a}_2$, $\hat{b}_1=\hat{p}\cdot\hat{b}_2$, $\hat{c}_1=\hat{p}\cdot\hat{c}_2$ vagy olyan $\hat{q}\in Z_n^*$ szám amelyre $\hat{a}_2=\hat{q}\cdot\hat{a}_1$, $\hat{b}_2=\hat{q}\cdot\hat{b}_1$, $\hat{c}_2=\hat{q}\cdot\hat{c}_1$.

Bizonyítás: Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a legalább egy invertálható elem az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ együtthatók, vagy a $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ szabad tagok közül való. Az első esetben, az általánosság csorbítása nélkül feltételezhető, hogy pl. $\hat{a}_1$ invertálható, és legyen $\hat{a}'_1$ az inverze (a szorzás szerinti szimmetrikusa) ezért az (1)-es összefüggés alapján $\hat{b}_2=(\hat{a}_2\hat{a}'_1)\cdot\hat{b}_1$ és a (3)-as összefüggés alapján pedig $\hat{c}_2=(\hat{a}_2\hat{a}'_1)\cdot\hat{c}_1$, továbbá a szimmetrikus elem értelmezése alapján pedig $\hat{a}_2=(\hat{a}_2\hat{a}'_1)\cdot\hat{a}_1$, ezért $\hat{p}=\hat{a}_2\hat{a}'_1$ választás éppen megfelel. Továbbá, amennyiben a $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ valamelyike invertálható feltételezhető, hogy ez éppen a $\hat{c}_1$ szám, ekkor (2)-es összefüggés alapján $\hat{b}_2=(\hat{c}_2\hat{c}'_1)\cdot\hat{b}_1$, a (3)-as összefüggés alapján pedig $\hat{a}_2=(\hat{c}_2\hat{c}'_1)\cdot\hat{a}_1$, és az inverz elem értelmezéséből $\hat{c}_2=(\hat{c}_2\hat{c}'_1)\cdot\hat{c}_1$ adódik, tehát $\hat{q}=\hat{c}_2\hat{c}'_1$ éppen megfelel.

Megjegyzések:

1.) Érdemes felfigyelni arra, hogy a tétel bármelyik invertálható együttható esetén megadja a szóbanforgó $\hat{p}$ illetve $\hat{q}$ „szorzó” meghatározásának a módját is! Természetesen ilyen szorzó több is adódhat, de például egy $a'=a$ egyenlőség miatt egybe is eshetnek.

2.) Könnyen belátható, hogy akár egyetlen invertálható együttható vagy szabad tag létezése esetén létezik olyan $\hat{p}\in Z_n^*$ vagy $\hat{q}\in Z_n^*$ amelyre fennáll a következő egyenlőségek valamelyike: $\hat{a}_2x+\hat{b}_2y-\hat{c}_2=\hat{p}\cdot(\hat{a}_1x+\hat{b}_1y-\hat{c}_1)$ vagy $\hat{a}_1x+\hat{b}_1y-\hat{c}_1=\hat{q}\cdot(\hat{a}_2x+\hat{b}_2y-\hat{c}_2)$.

3.) Vegyük észre, hogy a bizonyított eredmény teljesen hasonló ahhoz az esethez, amikor az egyenletrendszert az R-en tekintenénk, és fennállnak a $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ feltételek. Ekkor mint ismeretes az egyenletrendszert alkotó két egyenlet megfelelő együtthatói arányosak, vagyis $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ és a közös aránysor értékét *p*-vel jelölve, valóban $a_1=p\cdot a_2$, $b_1=p\cdot b_2$, $c_1=p\cdot c_2$ ami éppen $a_2=q\cdot a_1$, $b_2=q\cdot b_1$, $c_2=q\cdot c_1$ alakra is hozható.

11. tétel. Amennyiben a megoldandó egyenletrendszer esetén $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$, továbbá az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ számok közül legalább egyik invertálható a Z_n-ben, akkor az egyenletrendszer összes megoldását vagy az $\hat{a}_2\,x+\hat{b}_2\,y=\hat{c}_2$ vagy az $\hat{a}_1\,x+\hat{b}_1\,y=\hat{c}_1$ egyenlet megoldásai adják aszerint hogy létezik vagy olyan $\hat{p}\in Z_n^*$ vagy olyan $\hat{q}\in Z_n^*$, amelyekre fennáll az $\hat{a}_1=\hat{p}\cdot\hat{a}_2$, $\hat{b}_1=\hat{p}\cdot\hat{b}_2$, $\hat{c}_1=\hat{p}\cdot\hat{c}_2$ vagy az $\hat{a}_2=\hat{q}\cdot\hat{a}_1$, $\hat{b}_2=\hat{q}\cdot\hat{b}_1$, $\hat{c}_2=\hat{q}\cdot\hat{c}_1$ összefüggések valamelyike.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy például az $\hat{a}_1=\hat{p}\cdot\hat{a}_2$, $\hat{b}_1=\hat{p}\cdot\hat{b}_2$, $\hat{c}_1=\hat{p}\cdot\hat{c}_2$ összefüggések állnak fenn. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer két egyenlete $\hat{p}\cdot(\hat{a}_2\,x+\hat{b}_2\,y-\hat{c}_2)=\hat{0}$ illetve $\hat{a}_2\,x+\hat{b}_2\,y-\hat{c}_2=\hat{0}$. A $(p,\ n)=1$ esetben gyökvesztés nélkül egyszerűsíthetünk $\hat{p}$-pal, így a két egyenletnek azonos számú megoldása van. Ellenkező esetben az $\hat{a}_2\,x+\hat{b}_2\,y-\hat{c}_2=\hat{0}$ egyenletnek van kevesebb megoldása vagyis mindenképpen elegendő csak ezt megoldani. Teljesen hasonlóan járunk el az $\hat{a}_2=\hat{q}\cdot\hat{a}_1$, $\hat{b}_2=\hat{q}\cdot\hat{b}_1$, $\hat{c}_2=\hat{q}\cdot\hat{c}_1$ esetben is.

Megjegyzés: Amennyiben n=prímszám, úgy a (Z_n, +, ·) struktúra kommutatív test, így a $\hat{0}$ kivételével minden $a\in Z_n$ invertálható, sajátos esetben az $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ számok is, ezért ebben az esetben érvényes az előző két tétel eredménye!

4. példa: Oldjuk meg Z_5-ben a $\hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4}$ és $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ egyenletrendszert.

8. példa: Oldjuk meg Z_8-ban a $\hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{6}$ egyenletrendszert.

12. példa: Oldjuk meg Z_6-ban a $\hat{2}x+\hat{4}y=\hat{4}$ és $\hat{4}x+\hat{2}y=\hat{2}$ egyenletrendszert.

A felsorolt három példa lényegében abban különbözik egymástól, hogy az első esetben minden együttható invertálható, a második esetben csak bizonyos együtthatók invertálhatók, a harmadik esetben pedig egyik együttható sem invertálható az illető (Z_n,+,.) –ben. Ezúttal azonban ez az invertálhatósági tulajdonság sokkal fontosabb mint eddig!

A 4. példa esetén mivel mindegyik együttható invertálható, ezért a **10. tétel** alapján mivel $\hat{a}_1\cdot\hat{a}_2'=\hat{b}_1\cdot\hat{b}_2'=\hat{c}_1\cdot\hat{c}_2'=\hat{4}$ és $\hat{a}_1'\cdot\hat{a}_2=\hat{b}_1'\cdot\hat{b}_2=\hat{c}_1'\cdot\hat{c}_2=\hat{4}$ így többféleképpen is azt kaptuk, hogy $\hat{p}=\hat{q}=\hat{4}$, vagyis $\hat{2}x+\hat{3}y-\hat{1}=\hat{4}\cdot(\hat{3}x+\hat{2}y-\hat{4})$ de ugyanakkor az is igaz, hogy $\hat{3}x+\hat{2}y-\hat{4}=\hat{4}\cdot(\hat{2}x+\hat{3}y-\hat{1})$, tehát a **11. tétel** értelmében elegendő megoldani az egyenletrendszer egyik egyenletét (ez bármelyik lehet), ahonnan megkapjuk a 4. részben is kapott 5 megoldást (**MatLap 5/2009**).

A 8. példa esetén a az egységelemen kívül a Z_8-ban csak a $\hat{3}$ invertálható, így a **10. tétel** alapján $\hat{b}_1'\cdot\hat{b}_2=\hat{3}\cdot\hat{2}=\hat{q}$, vagyis $\hat{4}x+\hat{2}y-\hat{6}=\hat{6}\cdot(\hat{2}x+\hat{3}y-\hat{1})$, így a **11. tétel** értelmében csupán a $\hat{2}x+\hat{3}y-\hat{1}=\hat{0}$ egyenletet kell megoldani. (v.ö. **MatLap 3/2009**)

A 12. példa esetén, már az előző részben (**MatLap 5/2009**) kimutattuk, hogy bármelyik egyenlet a másiknak éppen az $\hat{5}$-pal való beszorzottja, és mivel (*5, 6*)= 1 ezért gyökvesztés nélkül egyszerűsítve $\hat{5}$-pal, a két egyenlet egybeesik. Tehát elegendő az eredeti egyenletek közül bármelyiket megoldani. Ebben az esetben a meglepő tény csupán az lehet, hogy sem az együtthatók sem a szabad tagok közül egyik sem invertálható, és mégis létezett a $\hat{p}$, sőt a $\hat{q}$ szorzó is amiről a **10. tételben** írtunk. Ellenben ez nem minden esetben következik be!

13. példa: Oldjuk meg Z_{36}-ban a $\hat{2}x+\hat{12}y=\hat{2}$ és $\hat{3}x+\hat{18}y=\hat{3}$ egyenletrendszert.

Megoldás: Érdemes felfigyelni arra, hogy ebben az esetben a $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_x=\hat{\Delta}_y=\hat{0}$ feltételek úgy teljesülnek, hogy $\hat{a}_1\cdot\hat{b}_2=\ \hat{a}_2\cdot\hat{b}_1=\hat{b}_1\cdot\hat{c}_2=\ \hat{b}_2\cdot\hat{c}_1=\ \hat{0}$, így a 10. tételhez hasonló eredmény bizonyítására nem sok az esély. Ha megpróbálnánk a $\hat{p}$ „szorzó” keresését, akkor ennek egyidőben teljesítenie kellene a $\hat{3}\cdot\hat{p}=\ \hat{2}$, a $\hat{18}\cdot\ \hat{p}=\ \hat{12}\ \in\ \hat{6}(\hat{3}\cdot\ \hat{p}-\hat{2})=\hat{0}$ és a $\hat{3}\cdot\hat{p}=\ \hat{2}$ feltételeket. Könnyen belátható, hogy ezek teljesüléséhez szükséges és elegendő, hogy $\hat{3}\cdot\hat{p}=\ \hat{2}$ legyen. Ellenben a (*3, 36*)= *3* | *2* hamis állítás alapján ennek az egyenletnek nincs megoldása a Z_{36}-ban (v.ö. **MatLap 2/2009**). Hasonlóan látható be, hogy a $\hat{q}$ létezése a $\hat{2}\cdot\hat{p}=\ \hat{3}$ egyenlet megoldásához vezet, amely szintén megoldhatatlan a Z_{36}-ban. Ellenben vegyük észre, hogy az egyenletrendszer egyenletei így is írhatók: $\hat{2}(x+\hat{6}y-\hat{1})=\hat{0}$ és $\hat{3}(x+\hat{6}y-\hat{1})=\hat{0}$. Ez arra hívja fel a figyelmet, hogy ezúttal léteznek olyan $\hat{p}$, $\hat{q}\in\ Z_{36}$ (nem invertálható) számok amelyekre egyidőben fennállnak a $\hat{p}\cdot\hat{a}_1=\ \hat{q}\cdot\hat{a}_2$, $\hat{p}\cdot\hat{b}_1=\ \hat{q}\cdot\hat{b}_2$, $\hat{p}\cdot\hat{c}_1=\ \hat{q}\cdot\hat{c}_2$ összefüggések (p-q).
Továbbá ha a két módosított egyenlet megfelelő oldalait összeadjuk, akkor az $\hat{5}(x+\hat{6}y-\hat{1})=\hat{0}$ egyenlethez jutunk, és az (5, 36)= 1 alapján gyökvesztés nélkül egyszerűsítve $\hat{5}$-pal, így $x+\hat{6}y-\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow x=\hat{1}+\hat{30}y$ ahol y$\in Z_{36}$ minden értéket felvehet, és $x=\hat{1}+\hat{30}y$.

Sajnálatos módon sem bizonyítani, sem cáfolni nem sikerült azt, hogy a nem invertálható együtthatók és nem invertálható szabad tagok esetén szükségszerűen fennáll-e vagy nem a (p-q) összefüggés (ami egyébként a *p*= 1 illetve *q*= 1 esetben a **10. tétel** feltételeit adja).

Szakirodalom:

[1] C. Nita, T. Spircu: Probleme de structuri algebrice, Editura Technica, Bucuresti – 1974., 39.-41. oldalak.
[2] Florentin Smarandache: „Integer algorithms to solve linear eguations ans systems”, Ed. Scientifique, Casablanca, 1984. (Ugyanez megjelent a Gamma XXIX-XXX, X. évfolyam, 1987 Októbet 1-2 számában is).
[3] András Szilárd és szerzőtársai: Megoldások a XII. osztályos tankönyv feladataihoz, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2005, 188. ; 294-295. oldalak.
[4] Farkas Miklós: Algebra, tankönyv a XII. osztályok számára M1, Erdélyi Tankönyvtanács.
[5] Ion D. Ion és szerzőtársai: Matematika: Tankönyv a XII. osztály számára M1, Ábel Kiadó (a Sigma kiadónál megjelent tankönyv fordítása).
[6] Kacsó Ferenc: Algebra, Tankönyv a XI. osztály számára, Klozsvár-2006, 107.-109. old.
[7] Thomas Koshy: Elementary Number Theory with Applications, Second edition, Academic Press 2007, 308.-317. old.