Az érettségi vizsgára előkészülő tanulók figyelmébe!

Egyenletek és egyenletrendszerek megoldása a Z_n halmazon

Az $\hat{a}\,x = \hat{b}$ egyenlet megoldása a Z_n halmazon

Az utóbbi időben mint a XII. osztályos alternatív tankönyvekben, mint az érettségi- vagy felvételi vizsgákon egyre gyakrabban találkozunk olyan feladatokkal, amelyek lineáris egyenletek vagy egyenletrendszereknek a Z_n halmazon történő megoldását kérik, a megoldáshoz szükséges elméleti háttérről nagyon keveset olvashatunk.
Éppen ezért, az elkövetkező cikksorozatot amolyan hiánypótlóként írjuk, és főleg azt szeretnénk elérni, hogy a tanulók sokkal átfogóbb képet, és megalapozott elméleti és gyakorlati alapot alkothassanak erről a témáról, mint amilyent alkothatnak úgy, ha csupán a példákat és feladatokat oldják meg a tankönyvekből, példatárakból.

Mindamellett, hogy a kiválasztott témakör kezdetben nagyon egyszerűnek tűnhet mégis kihangsúlyozunk néhány olyan dolgot, aminek a tudatosítása és megértése sikeresebb és eredményesebb tanuláshoz vezet.

Már a kisosztályokban, többé vagy kevésbé álcázottan minduntalan előfordulnak az mx+n=p úgynevezett elsőfokú egyismeretlenes (röviden lineáris) egyenletek. A kisosztályokban a megoldásukat eleinte nyitott mondatok, majd a mérlegelv segítségével kezdik történi, aztán lassan-lassan már a jártaság és készség szintjén annyira előnybe kerülnek az automatizmusok, hogy az egyenlet megoldására már ilyen megfogalmazásokat használnak, mint például: „átvisszük a másik oldalra”, vagy „mindkét oldalt elosztjuk”, stb. És így ezek a megnevezések meghonosodnak a mindennapi tanulásban, de közben elvész a tartalma, hogy vajon ezen megnevezések alatt mit is kell érteni? Ennek következtében a XII. osztályos tanulók gyakran nehezen tudják kezelni ezt a „válsághelyzetet” akkor, amikor a Z_n halmazon egyenleteket és egyenletrendszereket kell megoldjanak, ugyanis a Z_n halmazon csak az összeadás és a szorzási művelet értelmezett, és mit értsünk az előző idézőjeles megfogalmazások alatt? Ennek tisztázása végett pillantsunk vissza arra az időszakra, amikor az egyenletek megoldását tanították, és vizsgáljuk meg a mx+q=p egyenlet megoldási lépéseit az R-en.
(1) Az mx+q=p egyenlet esetén mindkét oldalhoz *hozzáadjuk a q szám ellentettjét*, és így adódik, hogy mx=p+(-q) vagyis mx=p-q, amire azt mondjuk, hogy „átvittük a másik oldalra”
(2) Ezután az mx=p-q egyenlet mindkét oldalát *beszorozzuk a q szám inverzével,* és így adódik, hogy x= $(p\text{-}q)\times\frac{1}{m}=\frac{p-q}{m}$, amire azt mondjuk, hogy „átosztottunk m-el” vagy másvalami ehhez hasonló megfogalmazást.

Amennyiben minduntalan szemelőtt tartjuk az előbb kihangsúlyozottakat, úgy az egyenleteknek és egyenlet rendszereknek a Z_n halmazon történő megoldása sem fog nehézséget jelenteni, noha – mint látni fogjuk – ez a témakör messziről sem olyan egyszerű mint amilyennek tűnik.

A cikksorozatnak ebben a részében az $\hat{a}\,x = \hat{b}$ egyenletnek a Z_n halmazon történő megoldásával foglalkozunk és erre alapozva a következő részbe az $\hat{a}\cdot x + \hat{b}\cdot y = \hat{c}$ egyenletnek a Z_n halmazon történő megoldását tanulmányozzuk, amire szükségünk van a harmadik részben tárgyalásra kerülő $\begin{cases} \hat{a}_1\, x + \hat{b}_1\, y = \hat{c}_1 \\ \hat{a}_2\, x + \hat{b}_2\, y = \hat{c}_2 \end{cases}$ elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásának tanulmányozásakor is.

Mindenek előtt foglaljuk össze a legszükségesebb, fontosabb fogalmakat, eredményeket amiket használni fogunk.

(1) Adott $n\in N^*$ esetén legyen $\Re_n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ a természetes számoknak, az adott n természetes számmal való osztási maradékainak halmazát.

Értelmezhetők a $\oplus,\otimes: \Re_n\times\Re_n \longrightarrow \Re_n$ műveletek:

a) Bármely $x, y \in \Re_n$ esetén $x \oplus y=$ az (x+y) számnak az n-el való osztási maradéka.

Például: $3,4\in \Re_5$ esetén n=5 ezért $3 \oplus 4=2$ mert $3+4=7=1\times5+2$

b) Bármely $x, y \in \Re_n$ esetén $x \otimes y=$ az $(x\cdot y)$ számnak az n-el való osztási maradéka.

Például: $3,4\in \Re_5$ esetén n=5 ezért $3 \otimes 4=2$ mert $3\cdot4=12=2\times5+2$

(2) Az összes olyan egész számok halmazát, amelyeknek az n-el való osztási maradéka az r szám,jelölje $\hat{r}$. Az így kapott halmaz neve: „az r maradékosztály modulo n”.

Például: a 2 maradékosztály modulo 5 halmaz a következő: $\hat{2}=\{\ldots-12, -7, -2, 2, 7, 12, \ldots\}$

(3) Adott n pozitív egész szám esetén jelölje Z_n az *összes* maradékosztály modulo n halmazt, vagyis $Z_n=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$.

Például: $Z_5=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ esetén $\hat{3}=\{\ldots-13, -8, 8, 13, 18, \ldots\}$

Értelmezhetők a $+, \times: Z_n\times Z_n \longrightarrow Z_n$ műveletek:

a) Bármely $\hat{x}, \hat{y}\in Z_n$ esetén $\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y}$ módon értelmezett (vagyis a „eredmény” az x+y összegnek az n számmal való osztási maradékának az osztálya).

Például: $\hat{6}, \hat{4}\in Z_8$ esetén $\hat{6}+\hat{4}=\widehat{10}=\hat{2}$ hiszen $10=1\times8+2$

b) Bármely $\hat{x}, \hat{y}\in Z_n$ esetén $\hat{x}\times\hat{y}=\widehat{x\cdot y}$ módon értelmezett (vagyis a „eredmény” az $x\cdot y$ szorzatnak az n számmal való osztási maradékának az osztálya). Az $\hat{x}\times\hat{y}$ szorzatot gyakran $\hat{x}\cdot\hat{y}$ módon jelölik, a továbbiakban ezt a jelölést használjuk.

Például: $\hat{6}, \hat{4}\in Z_8$ esetén $\hat{6}\cdot\hat{4}=\widehat{24}=\hat{0}$ hiszen $24=3\times8+0$

A gyakorlatban konkrét Z_n esetén szokás úgynevezett összeadási és szorzási művelettáblázatot készíteni, ellenben az időigényessége miatt, jártasság szintjén ezt már mellőzzük, és inkább a fogalmak és műveletek értelmezését használjuk.

A továbbiakban adott n pozitív egész szám esetén, a (Z_n, +, ·) kétműveletes struktúrának néhány fontosabb tulajdonságát említjük meg, ezek bizonyítása megtalálható a legtöbb XII. osztályos tankönyben és feladatgyűjteményben (v.ö. [1], [3], [4], [5]).

(1) Általában a (Z_n, +, ·) struktúra egységelemes kommutatív gyűrű, amit *modulo n* maradékosztályok gyűrűjének nevezünk

(2) A (Z_n, +, ·) struktúra akkor és csakis akkor zérusosztó mentes gyűrű, ha n= prímszám

(Emlékeztetünk: $\hat{x}, \hat{y}\in Z_n$ zérusosztók a Z_n-ben, ha $\hat{x}\neq\hat{0}$, $\hat{y}\neq\hat{0}$ de $\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{0}$. A fenti példánkban pl. $\hat{6}, \hat{4}\in Z_8$ zérusosztók, hiszen $\hat{6}\cdot\hat{4}=\hat{0}$)

(3) A (Z_n, +, ·) struktúra akkor és csakis akkor kommutatív test, ha n= prímszám

(4) Ha $\hat{a}\in Z_n$, akkor a következő két állítás egyenértékű:

a) Az $\hat{a}$ elem invertálható (a szorzásra nézve) a Z_n-ben

b) *(a,n)=1* vagyis az *a* és *n* számok relatív prímek

Következmény: Ha p pozitív prímszám, akkor a (Z_p, +, ·) kommutatív test minden eleme invertálható, tehát nem léteznek zérusosztók.

A továbbiakban rátérünk az $\hat{m}x+\hat{q}=\hat{p}$ egyenletnek a Z_n halmazon történő megoldására. Mivel a Z_n-ben minden $\hat{q}$ számnak van ellentettje (a továbbiakban $\hat{a}$ ellentettjét jelölje -$\hat{a}$), ezért az egyenlet mindkét oldalához hozzáadva a $\hat{q}$ szám ellentettjét, a -$\hat{q}$ számot, az $\hat{m}x=\hat{p}-\hat{q}$ egyenletet kapjuk, ami $\hat{a}x=\hat{b}$ alakú, és a továbbiakban csak az ilyen típusú egyenlet megoldásával foglalkozunk.

Az előbbiekben bemutatott (4)-es tulajdonság nyomós érv arra, hogy az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenlet megoldása esetén megkülönböztessük az *(a,n)=1 és (a,n)* $\neq 1$. vegyük tehát sorra.

I.eset: *(a,n)=1*

Ekkor az $\hat{a}\in Z_n$ szám invertálható (még úgy is mondják, hogy szimmetrizálható a szorzásra nézve) vagyis van inverze a Z_n-ben, a továbbiakban jelöljük ezt $\hat{a}$' -el. Az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenlet mindkét oldalát megszorozva az $\hat{a}$ számnak az $\hat{a}$' inverzével, a szorzási művelet értelmezése alapján kapjuk, hogy $x=b\cdot\hat{a}'$. Ez az egyenletnek az egyetlen megoldása. (vagyis ebben az esetben úgy mondva „kifejezhettük" az x változót).

Például: Oldjuk meg a Z_5 halmazon a $\hat{2}x=\hat{3}$ egyenletet.

Mivel (2,5)=1 ezért $\hat{2}$ invertálható a Z_5 halmazon és $\hat{2}$' = $\hat{3}$, ugyanis $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{6}=\hat{1}$. Így az egyenlet mindkét oldalát beszorozva a $\hat{3}$ számmal, x = $\hat{3}\cdot\hat{3}=\hat{9}=\hat{4}$ egyetlen megoldást kapjuk.

Mielőtt rátérünk a második eset elemzésére vegyük észre, hogy az a·x=b egyenletnek az R-en pontosan 1 megoldása (zérushelye) van, és az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenletnek is pontosan 1 megoldása van, minden olyan n pozitív egész számra, amelyre *(a,n)=1.* Mint látni fogjuk, a következő esetben ez már nem érvényes, és ekkor merül fel a *megoldhatóság feltétele* valamint a *megoldások számának* a meghatározása.

II.eset: $(a,n)=d\neq 1$

1) Ha feltételezzük, hogy *d* nem osztja a *b* szabad tagot és mégis létezne x=$\hat{X}\in Z_n$ amelyre $\hat{a}x=\hat{b}$, akkor *a·X=b+k·n* lenne (k∈N*) tehát *a·X-k·n=b* és mivel $d|a$, és $d|n$ ezért d| (*a·X-k·n*)=*b* vagyis $d|b$ ami ellentmondás lenne.

Tehát $(a,n)=d\neq 1$ és *d* nem osztja *b* esetben, az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenletnek nincs megoldása a Z_n halmazon.

Például: Oldjuk meg a Z_6 halmazon a $\hat{2}x=\hat{3}$ egyenletet.

Látható, hogy a=2, b=3, n=6 és (a,n)=2 ami nem osztja a b=3 számot, vagyis az egyenletnek nincs megoldása a Z_6 halmazon. Gyakorlatban ezt még rövidebben is megmutathatjuk: a $\hat{2}x=\hat{3}$ egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk $\hat{3}$-mal és kapjuk, hogy $\hat{0}=\hat{3}$ ami ellentmondás, vagyis nincs megoldás. Ezt nem csak ebben a sajátos esetben tehetjük meg, hanem minden $(a,n)=d\neq 1$ esetben beszorzunk k=$\frac{n}{d}$ -vel, és ellentmondásra jutunk.

2) Vizsgáljuk most azt az esetet amikor igaz, hogy $d\,|\,b$.

Az $(a,n)=d\neq 1$ és $d\,|\,b$ feltételek alapján a=d·a_1, n=d·n_1 és b=d·b_1 , ahol (a_1, n_1)=1 (*)

Az (a,n)=d alapján $\exists$ u,v$\in$Z úgy, hogy u·a+v·n=d ahonnan u·a·b_1+v·n·b_1=d·b_1=b így Z_n-ben $\hat{a}\cdot(u\hat{b}_1)+(v\hat{b}_1 n)=\hat{b}\Leftrightarrow \hat{a}\cdot(u\hat{b}_1)=\hat{b}$ ami éppen azt jelenti, hogy x_0=$u\hat{b}_1$ egy megoldása az $\hat{a}\,x=\hat{b}$ egyenletnek. A továbbiakban megnézzük, hogyan kapható meg az egyenlet *összes megoldása*!

Legyen x=$\hat{X}\in Z_n$ megoldása az $\hat{a}\,x=\hat{b}$ egyenletnek. Ezért $a\hat{X}=\hat{b}$ ahonnan, $a\cdot X=b+k\cdot n$ lenne (k$\in$N*), és a (*) feltételek mellett $da_1X-db_1=kdn_1$ vagyis $a_1X-b_1=kn_1$ (i)

De mivel (a_1, n_1)=1, ezért $\exists$ u,v$\in$Z úgy, hogy a_1·u+n_1·v=1 (ii)

Az (i) és (ii) alapján kapjuk, hogy $a_1(X-ub_1)=n_1(vb+k)$ és mivel (a_1, n_1)=1 ezért $a_1\,|\,(X-ub_1)\,b$ vagyis $X-ub_1=mn_1$ (m$\in$Z) ahonnan $X=ub_1+mn_1$ vagyis $x=x_0+m\hat{n}_1$ (***)

Észrevehető, hogy ha m=d akkor $m\hat{n}_1=\hat{n}=\hat{0}$, vagyis a (***) összefüggés d különböző megoldást származtat. És mivel n=d·n_1 továbbá d=(a,n), ezért $n_1=\frac{n}{d}$ így $m\hat{n}_1=\hat{m}\frac{\hat{n}}{d}=\frac{m\hat{n}}{d}$.

Tehát $x=x_0+\frac{m\hat{n}}{d}$ ahol x_0=$u\hat{b}_1$ egy partikuláris megoldás és m$\in$ { $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, …, $\hat{d}-1$ }.

Gyakorlatban, nem túl nagy *n* esetén a megoldások megkeresésére alkalmas az úgynevezett értéktábla módszere is, ellenben - mint látni fogjuk – a kapott eredmény alapján is könnyűszerrel megkaphatók az x értékek, és azok pontos számát is előre lehet tudni.

Például: Oldjuk meg a Z_{12} halmazon a $\hat{3}x=\hat{6}$ egyenletet.

1. Megoldás: elkészítjük a következő értéktáblázatot

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\hat{10}$	$\hat{11}$
3x	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$

A táblázatból kiolvasható, hogy az egyenlet megoldásai x$\in$ { $\hat{2}$, $\hat{6}$, $\hat{10}$ }

2. Megoldás: alkalmazzuk az előbbiekben megállapított eredményeket.

Esetünkben a=3, b=6, n=12, d=(a,n)=3 és 3|6=b. Mivel d=3 ezért az egyenletünknek 3 megoldása lesz. A megoldások: $x=x_0+\frac{m\hat{n}}{d}$ ahol x_0 a $\hat{3}x=\hat{6}$ egyenletnek egy partikuláris megoldása esetünkben azonban könnyen látható, hogy x_0=2 egy megoldás, és mivel $\frac{mn}{d}=\frac{12m}{3}=4m$, ezért a megoldások x=$\hat{2}+\hat{4}m=4\hat{m}+2$ ahol m$\in$ {0,1,2}, így x$\in$ { $\hat{2}$, $\hat{6}$, $\hat{10}$ }.

Megjegyzés: Ha a $\hat{3}x=\hat{6}$ egyenlet minkét oldalát megszorozzuk $\hat{4}$-el, akkor a $\hat{0}=\hat{0}$ azonossághoz jutunk, és így hajlamosak lennénk azt hinni, hogy minden x$\in Z_{12}$ megoldás lenne, ellenben a bizonyítottak alapján mivel (*a, n*)= (*3, 12*)= *3* és *3*|*6* ezért az egyenletnek pontosan *3* megoldása van. A helyzeten azért nem kell csodálkoznunk, mert a $\hat{4}$-el való beszorzással mivel (*12, 4*)≠ *1* idegen gyököket hoztunk be!

A továbbiakban foglaljuk össze az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenlet megoldására vonatkozó eredményeinek:

1. Tétel: Az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenletnek a Z_n halmazon való megoldásairól ezt mondhatjuk:

1) Ha $(a,n)=1 \Rightarrow$ egyetlen megoldás van, ez $x=b\cdot \hat{a}'$, ahol *a'* az a inverze (a szorzásra nézve)
2) Ha $(a,n)=d\neq 1$ és d|b hamis $\Rightarrow$ az egyenletnek nincs megoldása
3) Ha $(a,n)=d\neq 1$ és d|b igaz $\Rightarrow$ az egyenletnek *d* számú különböző megoldása van:

$x=x_0+\dfrac{\hat{m}n}{d}$ ahol d=(a,n) és m∈ {$\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, …, $\widehat{d-1}$}, x_0 pedig az egyenletnek egy sajátos megoldása.

Következmény: Legyen n pozitív természetes szám és *k*= (*n, e*)≠ 1

Ekkor az $\hat{e}z=\hat{0}$ egyenletnek a Z_n halmazon *k* számú megoldása van, és ezeket így kapjuk meg: $z=\dfrac{\hat{m}n}{k}$ ahol *k*= (*e,n*) és *m*∈ {$\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, …, $\widehat{k-1}$}

Természetese ez a következmény az **1.Tétel**-nek egy sajátos esete, ellenben a következő részben nagyon sokszor fogjuk használni, így erre fogunk hivatkozni.

Megjegyzések:

1) Az $a\cdot x+b\cdot y=c$ (*a, b, c*∈Z) diofantikus egyenlet egész megoldásait keresve, az előző **1.Tétel** fontos megállapításokhoz vezet. Ha az egyenletben mindkét oldalon rátérünk a *modulo c* maradékosztályra, akkor az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenlet megoldásához jutunk, amiről éppen az **1.Tétel**-ben olvashatunk.

2) Az n=p=prím sajátos esetben, az $\hat{a}x=\hat{1}$ egyenletnek a Z_p-ben minden a≠0 egész szám esetén az **1.Tétel** értelmében pontosan 1 megoldása van, vagyis minden x≠0 invertálható, ami azt jelenti, hogy (Z_p, +,·) test struktúra.

3) Könnyen észrevehető, hogy ha x= $\hat{X}$ az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenlet megoldása a Z_n halmazon, akkor $\widehat{aX}=\hat{b}$ vagyis $aX=b+k\cdot n$ (k∈N) ⇔ $aX-b=k\cdot n$ ami kongruenciával felírva az $aX\equiv b \pmod n$ kongruencia-egyenletet jelenti. Tehát az egész témakört a kongruenciákkal is bemutathattuk volna, ellenben ekkor értelmezéseket, tulajdonságokat, eredményeket mind át kellett volna írnunk a kongruencia nyelvezetére, így inkább az oszthatóság „nyelvezeténél" maradtunk.

Az eddigiekben bizonyítottak alapján, a következő részben az $\hat{a}\cdot x+\hat{b}\cdot y=\hat{c}$ egyenletnek a Z_n halmazon való megoldását vizsgáljuk, ami rákövetkező részben, az egyenletrendszerek megoldásánál is szükséges lesz.

Az **1.Tétel** elmélyítése céljából tanulságosnak látjuk a következő feladatot:

Oldjuk meg Z_8-ban és tárgyaljuk az $\hat{a}x=\hat{b}$ egyenletet és a megoldásainak a számát! (v.ö. [3])

Az **1.Tétel** alapján járunk el, és a következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

1) Ha *a=0*, akkor csak a *b=0* esetben van megoldás, és ez $\forall x\in Z_8$.
2) Ha a≠0, akkor több esetet különböztetünk meg:
   a)Ha *a* ∈ {*1,3,5,7*} akkor (*a, n*)= (*a, 8*)=1 , ezért az egyenletnek mindegyik

esetben pontosan *1-1* megoldása van, és ez képletesen: $x = b \cdot \hat{a'}$, ahol *a'* az *a* számnak a szorzásra vonatkozó szimmetrikusa (inverze).

b) Ha $a \in \{2, 6\}$ akkor $(a, n) = (a, 8) = 2 \neq 1$ alapján, amennyiben *b* nem osztható *2*-vel, vagyis $b \in \{1,3,5,7\}$, úgy az egyenletnek nincs megoldása, ellenben ha $b \in \{0,2,4,6\}$ akkor az egyenletnek mindegyikesetben pontosan *2-2* megoldása van, és ez képletesen: $x = x_0 + \frac{\widehat{8m}}{2} = x_0 + \widehat{4m}$ ahol x_0 az egyenlet egy sajátos megoldása, és m$\in \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

c) Ha *a=4*, akkor $(a, n) = (4, 8) = 4 \neq 1$ alapján, amennyiben *b* nem osztható *4*-el, vagyis $b \in \{1,2,3,5,6,7\}$, úgy az egyenletnek nincs megoldása, ellenben ha $b \in \{0,4\}$ akkor az egyenletnek mindegyikesetben pontosan *4-4* megoldása van, és ez képletesen: $x = x_0 + \frac{\widehat{8m}}{4} = x_0 + \widehat{2m}$ ahol x_0 az egyenlet egy sajátos megoldása, és m$\in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

Szakirodalom:

[1] C. Nita, T. Spircu: Probleme de structuri algebrice, Editura Technica, Bucuresti – 1974. , 39.-41. oldalak.
[2] Florentin Smarandache: „Integer algorithms to solve linear eguations ans systems", Ed. Scientifique, Casablanca, 1984. (Ugyanez megjelent a Gamma XXIX-XXX, X. évfolyam, 1987 Októbet 1-2 számában is).
[3] András Szilárd és szerzőtársai: Megoldások a XII. osztályos tankönyv feladataihoz, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2005, 188. ; 294-295. oldalak.
[4] Farkas Miklós: Algebra, tankönyv a XII. osztályok számára M1, Erdélyi Tankönyvtanács.
[5] Ion D. Ion és szerzőtársai: Matematika: Tankönyv a XII. osztály számára M1, Ábel Kiadó (a Sigma kiadónál megjelent tankönyv fordítása).