AZ OKOSTELEFONOK ÉS A TÁBLAGÉPEK A GRÁFELMÉLETI TÉMAKÖRÖK OKTATÁSÁBAN II.

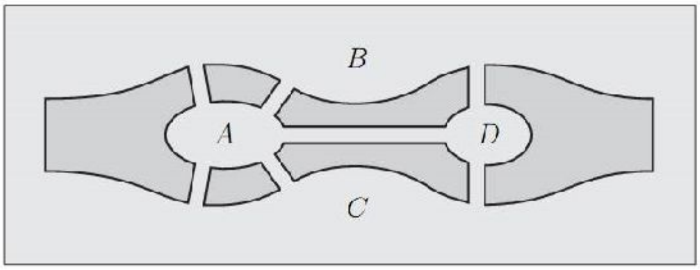
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző részben (MatLap 1/2016) számos olyan játékot mutattunk be, amelyeket tulajdonképpen didaktikai játékoknak nevezhetünk, mert ezek egyes gráfelméleti fogalmak, tulajdonságok és eredmények gyakorlati kivitelezésére, modellezésére szolgáltak, mint például az egyvonalas megrajzolhatósági problémák, az izomorf gráf fogalma és síkgráfok, a Hamilton utak fogalma. Ezek a játékok az okostelefonokon és a táblagépeken, az Androidos rendszereken futnak, így a használatuk a diákok keze ügyében vannak.

Ebben a részben egy újabb témakört veszünk nagyító alá, az egyvonalas bejárhatósági problémákat, amelyeknek az elméleti hátterét vizsgáljuk meg.

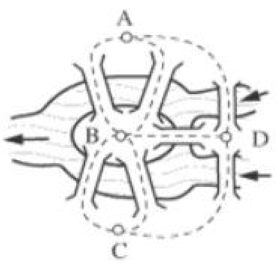
Egyvonalas bejárhatósági problémák

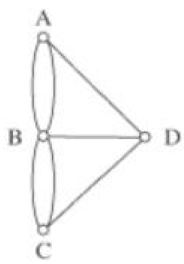
Az egyik legrégebbi bejárhatósági probléma az úgynevezett Königsbergi hidak problémája. A probléma története az, hogy a poroszországi Königsberg (most Kalinyingrád, Oroszország) városban 7 híd ívelt át a várost átszelő Prégel folyón úgy, hogy ezek a folyó két szigetét is érintették. A königsbergiek azzal a kérdéssel fordultak Eulerhez, vajon végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjanak át, és egyúttal visszaérjenek a kiindulópontba.



1736-ban Euler bebizonyította, hogy ez lehetetlen. A történethez hozzátartozik az a legenda is, hogy 1750 körül állítólag a königsbergi elit tagjai rendszeresen sétálgattak vasárnaponként a hidakon, hogy egy olyan útvonalat találjanak, amely megfelel a fenti feltételeknek.

A bizonyítása során Euler a problémát a gráfelmélet nyelvén fogalmazta meg, azaz leegyszerűsítette azt: a földeket, azaz a folyó partjait beleértve a szigeteket is csomópontoknak, a hidakat pedig éleknek tekintette a mai megfogalmazás szerint. Az így létrehozott csomópontok és élek pedig egy gráfot határoznak meg.

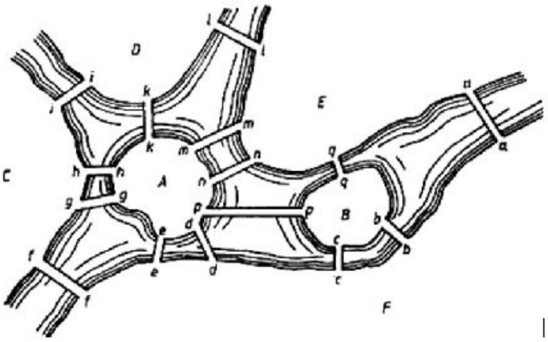


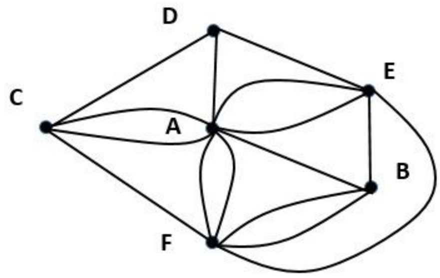


Vegyük észre, hogy a gráfnak mind a 4 csúcsának a fokszáma páratlan szám, ami azt jelenti, hogy a gráfban nincs sem zárt sem nyílt Euler út (v.ö.: MatLap 1/2016, 3. oldal). Ez tulajdonképpen azt is jelenti, hogy a kért séta nem valósítható meg.

Nézzünk most néhány bejárhatósági problémát:

1. Két szigetet az alábbi ábrán látható módon 15 híd köt össze egymással és a parttal. Bejárható-e a 15 híd úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer haladjunk át?

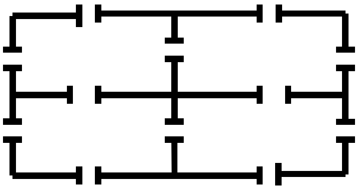


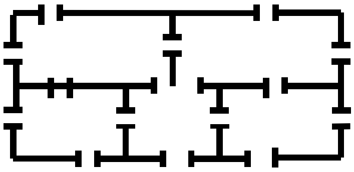


Ha az A, B, C, D, E és F szárazföldeket egy gráf csúcsainak, az a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p és q hidakat egy gráf éleinek tekintjük, láthatjuk, hogy minden csúcs fokszáma páros, kivéve a D és az E csúcsot, melyek fokszáma páratlan. Így Euler 2. tétele értelmében (v.ö.: MatLap 1/2016, 3. oldal) létezik nyílt Euler-út. Egy ilyen nyílt Euler út az élek (hidak) szerint az [abcdefghikmnpqt].

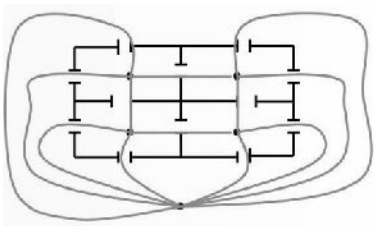
A bejárhatósági problémák egy érdekes osztályát képezik azok, amelyeknél például egy épület alaprajza szerint kell ajtókon áthaladni.

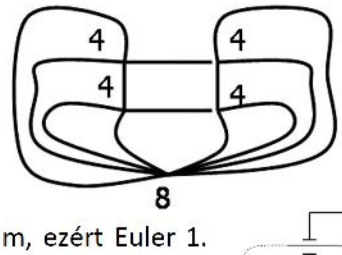
2.- 3. Az alábbi két ábrán látható alaprajzok esetén bárhonnan indulva, végig lehet-e menni minden ajtón pontosan csak egyszer?



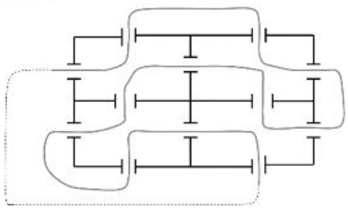


A válasz könnyen megadható, ha elkészítjük a rajzoknak a gráfját, az alábbiak szerint:

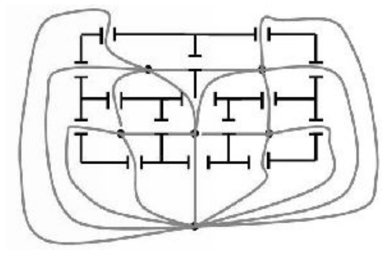


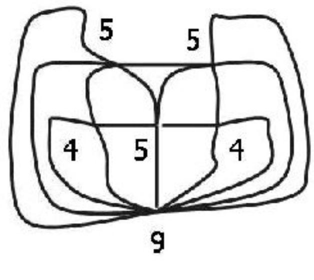


Mivel minden csúcspont fokszáma páros szám, ezért Euler 1. tétele értelmében a gráfban van zárt Euler út, vagyis a bejárás lehetséges, sőt visszajuthatunk ugyanabba a csúcsba ahonnan indultunk. Egy lehetséges bejárás például a mellékelt ábrán látható:



A második esetbe a gráf a következő:

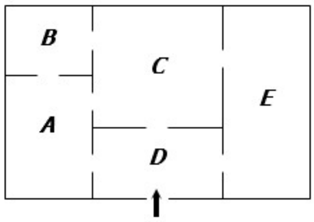


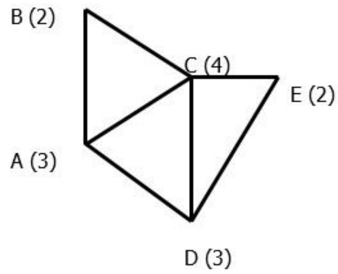


Mivel a gráfban több mint két csúcs fokszáma páratlan szám, ezért a gráf nem rajzolható meg egy folytonos vonallal, vagyis a tervezett séta nem valósítható meg.

Érdekes szórakoztató feladatok a következők:

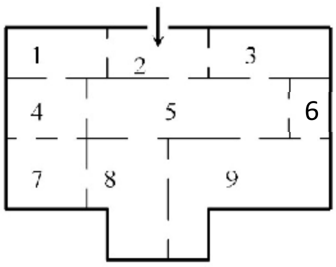
4. A Kovács család az alábbi ábrán feltüntetett alaprajzú lakást szeretné megvásárolni. A lakás D helyiségébe, a nyíllal jelölt bejárati ajtón lép be. A lakás melyik helyiségében tartózkodik most, ha mindegyik ajtón pontosan egyszer halad át?

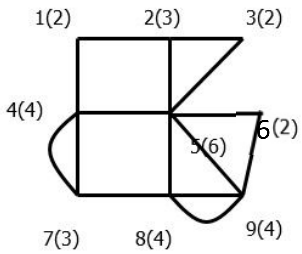




Olyan helyiségben nem tartózkodhat, amelynek páros számú ajtaja van, mert akárhányszor ment is be oda, ki is kellett jönnie. Elkészítve a séta gráfját, mivel csak 2 csúcs fokszáma páratlan, és mivel a D-ből indult, minden élen egyszer haladt át, tehát az A-ban kell legyen.

5. Süsü minden délután belép a palotába a nyíllal jelölt bejáraton, majd végig járja a palota 9 termét úgy, hogy közben minden ajtón egyszer megy át. Sétája végeztével leül a gyermekszobában, és mesét mond a kis királyfinak. Hányas szám jelöli a gyermekszobát?

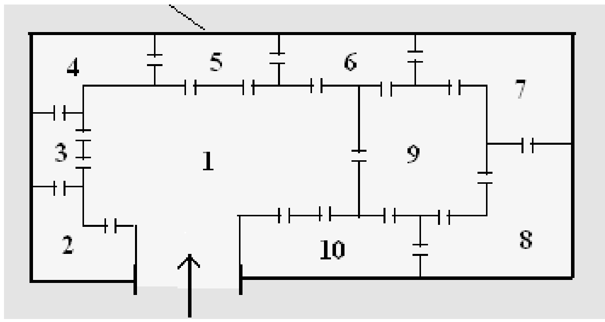




A 7-es szoba kivételével minden szobának páros számú ajtaja van, a 7-esnek három. Ha Süsü minden ajtón egyszer megy át, akkor nem maradhat azokban a szobákban, amelyeknek páros számú ajtajuk van. A mellékelt ábra gráfját tekintve, pontosan két csúcs fokszáma páratlan, a 2-es és a 7-es csúcsé, tehát ha a séta a 2-es csúcsban kezdődik, akkor a 7-esben ér véget. Tehát ez a gyerekszoba.

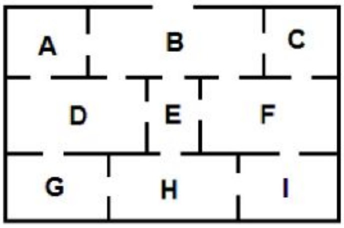
Hasonló ötleten alapszik a következő feladat is:

6. Ez egy irodaház egyik emeletének alaprajza. Pistike apja itt dolgozik. Mivel a kamrakulcsot elvitte magával az apuka, Pistikét utána küldték. Pistike összevissza bolyongva bejárta az egész épületet, minden ajtón átment, de mindegyiken csak egyszer. Végül megtalálta az apukát. Melyik szobában?



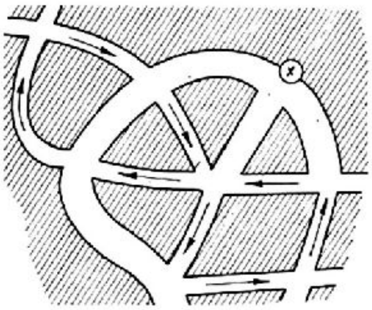
A 7-es szoba kivételével minden szobának páros számú ajtaja van, a 7-esnek három. Ezért apuka a 7-es szobában van. Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy készítse el a feladat gráfját is!

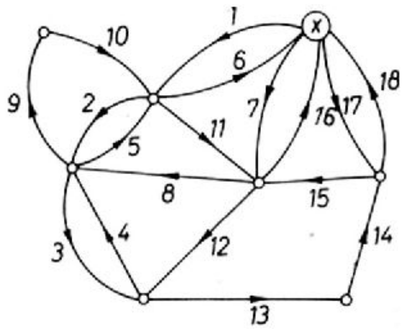
8. Betörőt fogtak a bankban, melynek alaprajza az ábrán látható. A betörőt a széf kinyitása közben fülelték le, és a biztonsági rendszer kamerái segítségével megállapították, hogy minden ajtón pontosan egyszer ment át, mire idáig eljutott. Melyik helyiségben van a széf?



Mivel a feladat megoldása az előbbiekhez hasonló, ezért a megoldást az érdeklődő Olvasóra bízzuk!

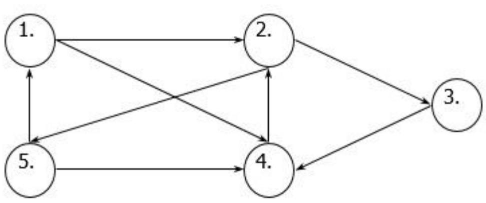
9. A mellékelt ábrán látható városrész utcahálózatát egyetlen öntözőkocsinak kell végig locsolnia. A kocsinak az ***x*** pontból kell indulnia és oda kell visszatérnie. A nyíllal jelölt utcákon a nyíl irányában egyirányú a forgalom. Egyirányú utcákon egyszer kell végig haladni, azonban a kétirányú utcák mindkét oldalát be kell járni. Az útkereszteződésekben kanyarodási korlátok nincsenek. Készítsünk gazdaságos bejárási tervet a kocsi számára!





A feladat gráfja a mellékelt ábrán látható. Ezúttal irányított gráfról van szó, de ebben is érvényes az Euler tétele. Mivel a gráf minden fokszáma páros, és minden csúcsnál a bemenő élek száma egyenlő a kijövő élek számával (vagyis a befok egyenlő a kifokkal) ezért Euler-gráf, tehát a kért bejárás elvégezhető. Az ábrán 1-től 18-ig számozva a bejárási sorrendet jelöltük meg.

10. Egy majomcsalád az erdőben öt fán él. Két fa közötti nyíl jelentése: erről a fáról arra a fára ment a majomcsalád. A nyilak segítségével állapítsd meg, hogy hol töltötték az éjszakájukat, és jelenleg hol tartózkodnak! Indokold meg a válaszodat!

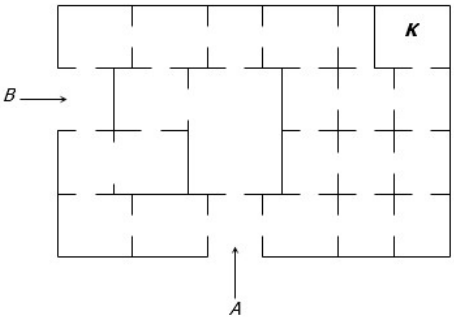


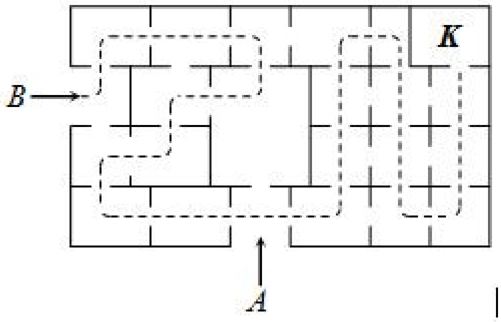
Ahol a bemenő nyilak száma megegyezik a kimenő nyilakéval, ott nem lehetnek, mert ahányszor az adott fára mentek, ugyanannyiszor el is hagyták azt. Most azon a fán vannak, ahol több a bemenő, mint a kimenő nyíl. Azon a fán éjszakáztak, ahol több a kimenő nyíl, mint a bemenő nyíl. Tehát az 5. fán éjszakáztak, és most az 4. fán vannak.

Szintén bejárhatósági problémák közé tartoznak a következő konstruktív megoldáson alapuló példák is:

11. A következő rajzon egy palota alaprajza látható, amely alagsorába két bejáraton (az *A*-n és a *B*-n) keresztül lehet bejutni. A jobb felső sarokban levő *K*-val jelölt kamrában található a kincs.

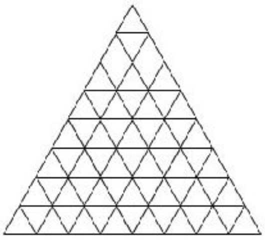
Lehetséges-e, hogy valamelyik bejáraton elindulva, minden szobán pontosan egyszer áthaladva eljussunk a kincshez?

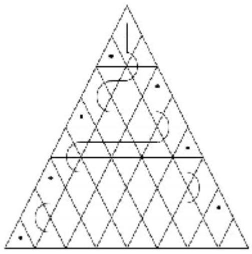




Egy lehetséges megoldás a mellékelt ábrán látható. Az érdeklődő Olvasóra bízzuk, hogy készítse el a feladat gráfját, ami elméletileg alátámasztja az út létezését és megszerkesztését.

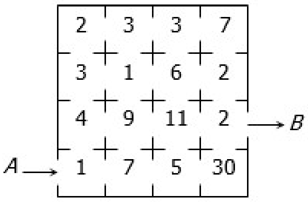
12. A mellékelt ábrán 64 db egyforma, háromszög alakú csempével kirakott fal látható. Egyszer egy szeszélyes takarítónő a fal csempéinek a tisztítását a legfelső csempével kezdte, és mindig az előzőleg tisztított csempe egyik szomszédjával folytatta. (Két csempe szomszédos, ha van közös oldaluk.) Mennyi a legtöbb csempe, amelyet a takarítónő megtisztított, ha egy csempét sem tisztított kétszer?

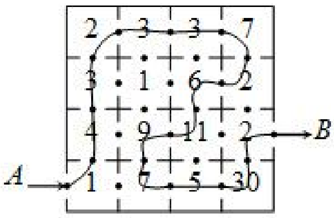




A mellékelt ábrán egy ilyen tisztítást látunk, és az is leolvasható, hogy éppen 7 csempe marad ki a tisztítás alól. Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy készítse el a feladat gráfját, ami elméletileg alátámasza a kapott eredményünket.

13. Az *A*-val jelölt ajtóból indulunk és a *B*-vel jelöltbe érkezünk, minden szobán csak egyszer haladunk át. Mennyi a legtöbb összegyűjthető pont?





Egy konstruktív megoldást a mellékelt ábrán láthatunk, miszerint a lehetséges 96 pontból legtöbb 95 gyűjthető össze!

Vegyük észre, hogy az utóbbi három feladat esetén nem Euler utakat kellett keressünk, hanem Hamilton utakat, és mint közismert, ezek esetében nincsenek az Euler tételeihez hasonló eredmények.

Befejezésül megjegyezzük, hogy ezúttal nem neveztünk meg didaktikai játékokat, ugyanis a következő részben folytatjuk az elméleti és gyakorlati megalapozásokat az ide kapcsolódó labirintus bejárással valamint a kromatikus számokkal kapcsolatosan, és ott megfelelő didaktikai játékokat is bemutatunk.