AZ OKOSTELEFONOK ÉS A TÁBLAGÉPEK A GRÁFELMÉLETI TÉMAKÖRÖK OKTATÁSÁBAN III.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző részben a bejárhatósági problémák elméleti és gyakorlati hátteréről olvashattunk. Ebben a részben először is - mint az előbbiek folytatásaként- labirintus problémákkal foglalkozunk, majd egy újabb témakört mutatunk be, a gráfok színezési problematikájának területéről.

Labirintus bejárási problémák

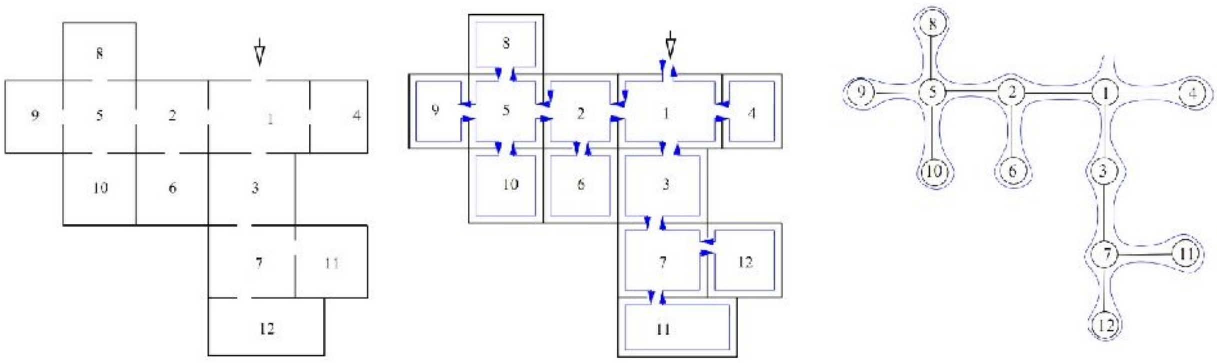
A labirintus, vagy útvesztő világszerte számos kultúrában jelen van, az őskortól napjainkig. Értelmezése az idők során alig változott: „helyiségek és folyosók bonyolult hálózata, ahol az elrendezésből adódóan nehézségekbe ütközik a tájékozódás és a kijutás.”

A labirintus a klasszikus görög mitológia szerint szobákból és folyosókból álló áthatolhatatlan építmény, amelyet Minósz, krétai király parancsára Daidalosz, a legendás hírű ezermester készített a knósszoszi királyi palotában. A király ide zárta Minótauroszt, az ember testű, bikafejű szörnyet, akit Thészeusz, Athén hercege a krétai királylány, Ariadné segítségével legyőzött. Minósz király leánya egy gombolyagot adott Thészeusznak, aki miután megküzdött a szörnnyel és végzett vele, a fonalat visszafelé követve kijutott a labirintusból. Daidalosz a labirintus megépítése után a magának készített viaszszárnyak segítségével menekült ki a szövevényes építményből, majd fiával Ikarosszal együtt Kréta szigetérő. A labirintus 5000 éves szimbólum, amely eredetileg a temetkezésekhez, a halottak kultuszához kapcsolódott, majd a halálból való újjászületés jelképeként mint belső út–beavatási út, mitikus jelentést hordozott és a termékenységkultuszok részévé vált.

Manapság a hétköznapi életben a labirintusok inkább szórakozás számba mennek, akár rejtvényes, akár játékos formákban vagy kivitelezésekben, mindig élmény marad egy-egy labirintusból való kiút megtalálása.

Mielőtt belépnénk a labirintusok sajátos világába, nézzünk egy alkalmazást, amelyik magába hordozza a labirintusokból való kijutások alapötletét.

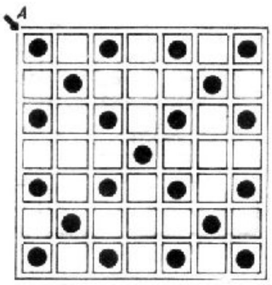
1 . Egy képtárlat minden termében (1-től 12-ig számozva), minden falon meg akarjuk tekinteni a kiállított festményeket úgy, hogy a sétánk a lehető legrövidebb legyen, és visszajussunk a kiindulási pontba. Hogyan lehetséges ez, ha a képtár alaprajza a következő:

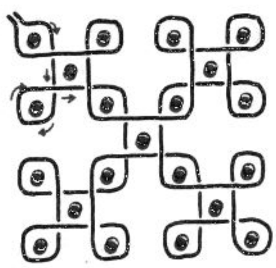


Egy ilyen sétát az úgynevezett „jobbkézszabály” segítségével ejthetünk meg, ami azt jelenti, hogy amint egy ajtón belépünk, mindig jobbkéz irányába folytatjuk az utunkat, amikor elhagyjuk a szobát akkor is, és így tovább. Az előző ábrákon a jobbkéz szabály szerinti bejárást láthatjuk.

Nézzünk most egy másik érdekes alkalmazást, amelynek a megoldásánál szintén a jobbkéz szabály játszik döntő szerepet.

2. A mellékelt ábrán egy szoborpark látható (a szobrok a pöttyök). Úgy akarunk az A-ból indulni, és a látható utak mindegyikén minél rövidebben végig haladni, hogy minden szobrot körkörösen megnézzünk (de csak egyszer körbe), és visszajussunk az A bejárathoz. Az egyes járdaszakaszokon legfeljebb egyszer haladhatunk végig. Lehetséges-e egy ilyen séta?

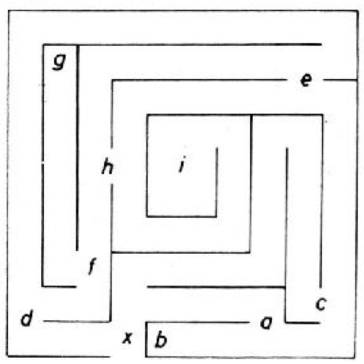


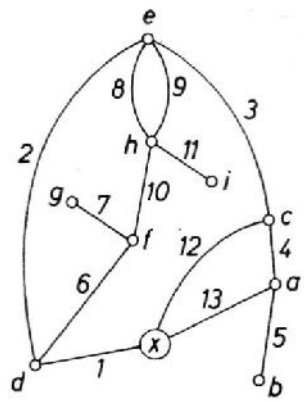


Igen, lehetséges egy ilyen séta, ha a jobbkézszabályt követjük, egy séta az előző ábrán látható.

Térjünk most rá a labirintus problémák tanulmányozására. Az előbbi két példa esetén a séta aránylag könnyen megvalósítható volt, hiszen semmiféle akadály, zsákutca nem volt. Ellenben a labirintusokban zsákutcák is vannak, ezek teszik bonyolulttá és egyben érdekesebbé egy labirintus bejárását. Ugyanakkor könnyen elképzelhető, hogy egy labirintusban rengeteget lehet fölöslegesen bolyongani, de minket az érdekel, hogyan lehet egy labirintusból minél hamarabb (minél rövidebb úton) kijutni. Ezért lesz szükség arra, hogy a gráfelmélet segítségével vizsgáljuk a legrövidebb kiutat a labirintusból.

3. A labirintus minden folyosóját végig kell járjuk, a lehető legrövidebb úton, és az x-ből indulva, ugyancsak az x-be kell megérkezzünk. Hogyan lehetséges ez?



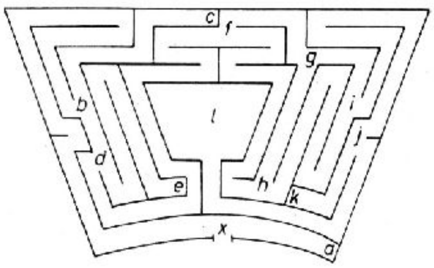


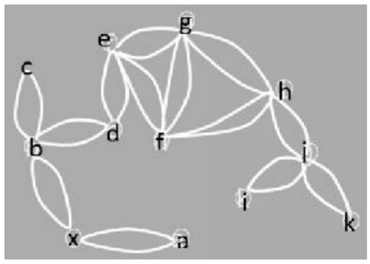
A labirintusnak egy gráfja a mellékelt ábrán látható. A gráf minden élén pontosan 2-szer kell végig haladnunk, az x-ből indulva, az x-be kell érkezni. Az éleket megszámoztuk.

Egy Euler-kör a következő: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 13, 12, 12, 13, 4, 3, 9, 10, 6, 6, 7, 7, 10, 11, 11, 8, 8, 2, 1.

4. Az ábrán látható labirintust a lehető legrövidebb úton kell bejárni úgy, hogy az x-ből indulunk, minden folyóson körbe kell járjunk, aztán visszaérjünk az x-be.

Hogyan lehetséges ez úgy, hogy minél rövidebb utat tegyünk meg?





A labirintus gráfja a mellékelt ábrán látható. Feladatunk, hogy ebbe keressünk egy Euler-kört, ami az x-ben kezdődik, és ott is ér véget. Mivel minden csúcs fokszáma páros, ezért van Euler-kör. Mindig a fal mellett <u>jobbra</u> haladva elv alapján egy Euler-kör a következő: x, b, c, b, d, f, g, i, j, l, j, k, j, i, h, g, h, i, g, f, h, f, d, e, d, b, x, a, x. Így minden élen csak egyszer mentünk át, és visszajutottunk a kezdőpontba.

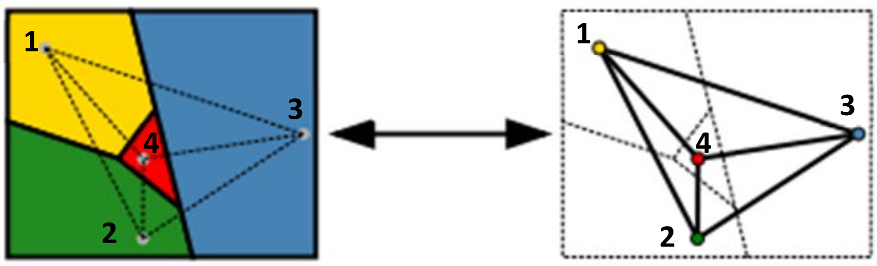
Az okostelefonokon és a táblagépeken számos labirintus játékot tölthetünk le a *Play Áruházból*, és ezek szórakoztató logikai játék számba mennek, de egyben didaktikai jelleggel is bírnak. Az Áruházban a *Labirintus* vagy az angol *Maze* szót írva be a keresőbe, különféle labirintus játékokat találunk, akár 3D-s változatban is. A labirintusból való kijutásnál is a jobbkézszabályt érdemes követni. vegyük észre, hogy a labirintus játékok sokkal dinamikusabbak ha nem papíron oldjuk, ahol a hibákat ki kellene radíroznunk, hanem az okostelefonokon és táblagépeken interaktívan tájékozódhatunk a labirintusokban. Ha a legrövidebb bejárási vagy kijutási utat keressük, akkor természetesen a labirintus gráfja az elméleti támpontunk.

A klasszikus labirintus játékok közül javasoljuk a *Flow Free* játékot, amelyben egy négyzet keretein belül azonos színű pontpárokat kell úttal összekötni, akadályok kikerülésével. Ezzel hasonló játékok még *a Max Match Number Dot Link*, *Diagonal Flow, színes Flow, Cicle Pie Free Flow, Draw Line Classic, Connect the Dots: Draw Lines, Loops and Flows, Dots: Game About Connecting.*

Ezek után váltsunk témakört, és kalandozzunk el a gráfok színezési problémáinak a birodalmában.

Gráfok színezési problémái

A gráfelméletben gráfok színezésének nevezzük, amikor színeket (vagy számokat) rendelünk egy gráf csúcsaihoz, esetleg éleihez. A csúcsszínezés a kiindulópontja a színezéseknek, tulajdonképpen valamennyi színezést erre vezetnek vissza és ily módon tanulmányozzák. Hogy milyen céllal végzik ezt? Nézzük csak az alábbi térkép részletet.



A térképnek 4 tartománya van, ezek mindegyike egy-egy színnel van kifestve, legyenek ezek 1, 2, 3, 4. Tekintsünk mind a négy színű tartományban egy-egy pontot. Ezeket összekötve egy gráfot kapunk. A gráf csúcsai legyenek ugyanolyan színűek, mint a tartományok ahonnan valók, vagyis 1, 2, 3, 4.

Belátható, hogy a következő két kijelentés egymással egyenértékű:

(1) A négy tartomány mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel úgy, hogy az egymással érintkező tartományok különböző színűek legyenek.
(2) A gráf négy csúcsát úgy színezzük ki, hogy egy él két végpontján levő csúcsok nem lehetnek azonos színűek.

A leírt műveletet a gráf színezésének nevezzük. Az első gráfszínezési eredmények síkbarajzolható gráfokkal voltak kapcsolatosak, a legfontosabb feladat térképek színezése volt. Amíg Anglia megyéit próbálták meg színekkel ellátni, Francis Guthrie megfogalmazta a négyszín-sejtést, miszerint 4 szín elegendő a különböző tartományok megfestéséhez, ha szomszédos tartományok különböző színeket kapnak. Guthrie testvére továbbította ezt a kérdést a matematikatanára, Augustus de Morgan felé, aki szintén megosztotta a sejtést William Hamiltonnal. Arthur Cayley 1879-ben vetette fel a problémát a London Mathematical Society egy találkozóján. Még ebben az évben Alfred Kempe nyilvánosságra hozta bizonyítását, és egy évtizeden át helyesnek ítélték. 1890-ben Heawood belátta, hogy Kempe bizonyítása hibás volt. A következő évszázadban rengeteg ötlet merült fel, hogy sikerüljön ezt a számot 4-re leszorítani, végül csak 1976-ban sikerül Kenneth Appelnek és Wolfgang Hakennek helyes bizonyítást adnia. Meglepetésre Heawoord és Kempe elgondolásait használták fel, számottevő kiterjesztés nélkül. A négyszín-tétel bizonyítása volt az első számítógépre alapozott bizonyítás.

A négyszíntétel tehát a következő: egy tetszőleges régiókra osztott síkot, akár egy politikai térképet egy ország megyéiről, ki lehet úgy színezni legfeljebb négy szín felhasználásával, hogy ne legyen két azonos színű szomszédos régió. Gráfokkal megfogalmazva pedig a következő: Ha G egy síkba rajzolható gráf, akkor a gráf színezéséhez elegendő 4 szín.

A gráfok színezése szoros kapcsolatban áll a kromatikus számmal. Egy G gráf csúcskromatikus száma az a legkisebb pozitív egész szám, amennyi színnel kiszínezhetők a gráf csúcsai úgy, hogy egy él két végpontja nem lehet azonos színű. Ezt a számot X(G)-vel jelöljük. Teljesen hasonlóan értelmezik az élkromatikus számot is.

A gráfszínezést az 1970-es évek óta tanulmányozták algoritmuselméleti problémaként. Nagyon sok megoldatlan kérdés van a gráfok színezése terén, viszont számtalan érdekes használata is van a gráfszínezésnek. Már maga a csúcskromatikus szám megállapítása érdekes és egyben szórakoztató kihívás. Ezt a tényt kihasználva, a Play Áruházban 3 érdekes játékra leltem, amelyek csúcskromatikus számokkal kapcsolatosak és szórakoztató jellegük miatt egyben didaktikai jellegük is van. A legegyszerűbb játék *a Graph Puzzle.* A feladat az, hogy adott gráf esetén a csúcsait színezzük ki úgy, hogy egy-egy él végpontjain a színek ne legyenek egyformák. Sajnos ez a játék csak 6 pályát tartalmaz, de a szerző leírása szerint szándéka van bővíteni a játékot. A második játék a *Chromatic Puzzle*, amely annyi újítást hoz, hogy a gráfok úgymond lebegnek, vagyis mozgathatók a csúcsaik, ezáltal könnyebb látni, hogy mely csúcsokat kötnek össze élek. A játékban több szint is van, a könnyűtől egészen a nagyon nehéz szintig. Mindkét játék menete az, hogy egy adott színre rátapíntunk, és azzal annyi csúcsot színezünk ki amennyit akarunk, majd színt válthatunk. A program egyetlen hátránya talán az, hogy aránylag terjedelmes, mert közel 24 MB-ot foglal a telepítéskor. A harmadik játék a *The Appies: Graph Puzzle,* a nemében egyedi és érdekes, hasznos és szórakoztató. Szintén gráfokkal találjuk szembe magunkat, na meg a színek helyett színes kis manókák (appies) amelyeket rá kell húzni a gráf valamely csúcsaira úgy, hogy egy él két végpontján a manók színe különböző legyen. A játékban annyi újítás található, hogy az egyes színes manókák mellett egy-egy szám is található ami azt jelzi, hogy hányszor is kell őket felhasználni. Így egy taktikát is sugall, hogy előbb egyetlen színt fogyasszunk el úgy, hogy azt helyezzük el, aztán folytassuk egy másik színnel ugyanúgy, ne pedig össze vissza színezzünk. A játék nagy erénye az, hogy 72 szintből áll, a kezdőtől kezdve egészen a nagyon nehézig.

A bemutatott játékokról elmondható, hogy amellett, hogy játékok sok didaktikai töltettel rendelkeznek, hiszen játék közben egyben tanulhatunk is és főleg a cselekvés miatt interaktívan tudunk a diákokkal fogalmakat, eredményeket elsajátíttatni.

Végezetül reméljük, hogy a bemutatott cikksorozattal sikerült érdekesebbé, tartalmasabbá, hatékonyabbá és szórakoztatóbbá tenni a gráfelmélet tanításának egyes fejezeteit!