Az okostelefonok és a táblagépek a gráfelméleti témakörök oktatásának a szolgálatában

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az [1]-ben bemutattuk azt, hogy miként használhatók a zsebszámológépek a sorozattal kapcsolatos témakörök oktatásában. A zsebszámológépek által sikeresen lehetett szemléltetni és érzékeltetni a sorozatok monotonítását, korlátosságát és a konvergenciáját. Mindehhez nem kellett okos telefon, csupán a számológép.

Most ellenben megmutatjuk, hogy az oktatásban, miként használhatjuk sikeresen az okostelefonokat meg a táblagépeket. És ezúttal nem csak a közönséges számológépet, hanem az okostelefonok és tablettek „okosságát” is használjuk, vagyis az összes biztosított lehetőségeket. Erre azért fókuszálunk, mert egyre több országban vezették be már az elemi osztályos oktatásba a táblagépek használatát, amit egyébként az országunkban is szorgalmaznak. A továbbiakban az ilyen téren, egy úgymond úttörő munkámról számolok be.

Megemlítjük, hogy az okostelefonok és táblagépek nagyrészén az Android operációs rendszer 4.x.x verziója fut, ami számos lehetőséget nyújt az oktatás terén is. Közismert, hogy ezekre az eszközökre az alkalmazásokat és programokat a **Play Áruházból** lehet telepíteni (a Windows felület alatt az úgynevezett **Play Store** a https://play.google.com/store linken érhetők el ezek). Ha az áruházban elég ügyesen szörfözünk, akkor számos olyan alkalmazást találhatunk, amelyek sikeresen használhatók az oktatásban.

Ismeretes, hogy a 11. osztályos matematika M2-es tantervének a II. félévre szóló előírásai alapján a tanulóknak a Gráfelmélettel kell megismerkedniük. Ez nagyon látványos és tanulságos témakör, amit megéri, hogy az okostelefonokkal és táblagépekkel még látványosabbá, gyakorlatiasabbá tegyünk. Ebben a témakörben legtöbb fogalmat, ismeretet csak amolyan statikus formában tanulhatunk meg, például amikor keressük bizonyos alakzatnak az egyvonalas megrajzolhatóságát, ha nem jártunk sikerrel már elsőre, akkor újabb meg újabb rajzokat, próbálgatásokat kell végeznünk. Ellenben, ha az Android platform lehetőségeire gondolunk, akkor ezek az elméleti jellegű próbálkozások konkrét cselekvéssé alakíthatók át, és így a diákok számára sokkal tanulságosabb, érdekesebb és eredményesebb.

Az elkövetkezőkben azt mutatom be, hogy egyes gráfelméleti témakörök miként taníthatóak interaktívan az okostelefonokkal és táblagépekkel, milyen alkalmazásokat választhatunk, amivel a diákjaink tulajdonképpen szívesen eljátszadoznak, de egyúttal komoly tanulási folyamatot is jelentenek, de a diákokhoz közelebb álló formában, a játék formájában. És ezt tanórákon kívül is szívesen végezték, ugyanis játéknak nyilvánították, és nem a megszokott, unalmas tanulásnak. És mindez azért van így, mert nem a száraz ismeretek, értelmezések, tételek, eredmények felsorakoztatásával állnak szembe, hanem konkrét tárgyis cselekvéssel kísérleteznek ki dolgokat, jönnek rá maguktól bizonyos összefüggésekre, és gyakorolhatják is azokat, de mind mind cselekvés útján. Természetesen az ilyen interaktív oktatás nem mellőzi az elméleti oktatást, csupán kiegészíti és érdekesebbé, hatékonyabbá teszi azt. Ez azt jelenti, hogy előbb megismerkednek az elméleti alapfogalmakkal, tételekkel, eredményekkel, de utána az egész elmélet átalakulhat játékos formába.

Én személyesen, három témakör tanítását kísérleteztem ki, amelyek a következők:

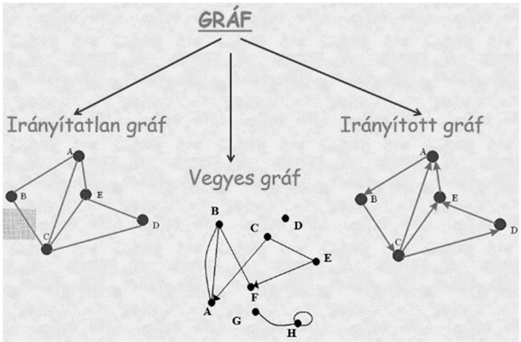
1) Az egyvonalas megrajzolhatósági problémák, az Euler utak kapcsán.
2) Az izomorf gráf fogalmának az elmélyítése

3) A Hamilton utak gyakorlati szemléltetése

A továbbiakban tehát bemutatjuk az elméleti hátteret, ami nélkül az oktatás lehetetlen lenne, majd a konkrét gyakorlati cselekvés, a játék formáját és lefolyását is bemutatjuk.

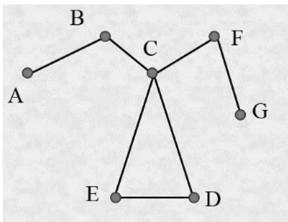
Az egyvonalas megrajzolhatósági problémák elméleti háttere

Ismert, hogy a **gráf** a graph=rajz Angol szóból ered, pontokból és vonalakból álló alakzat. A pontokat a **gráf csúcsainak**, a vonalakat a **gráf éleinek** nevezzük. A gráfok lehetnek **irányítatlan**, **irányított** vagy **vegyes** gráfok aszerint, hogy az élei nem irányított vagy éppen irányított szakaszok, illetve mindkettő szerepel.



Bármely gráfban a csúcsoknak van **fokszámuk**. Ezek az illető csúcshoz tartozó élek számával egyenlő. Irányított vagy vegyes gráfok esetén még beszélünk **kifokról** és **befokról**, a csúcsból kimenő illetve oda befutó irányított élek száma miatt.

A gráfban egy **séta**, csúcsoknak és éleknek a váltakozó sorozata amely csúccsal kezdődik és csúcsban végződik, és minden csúcs szomszédos az őt megelőző és őt követő éllel, illetve minden él két végpontja az őt megelőző és őt követő csúcs. Egy séta zárt, ha az első és az utolsó csúcsai megegyeznek, különben nyitott.



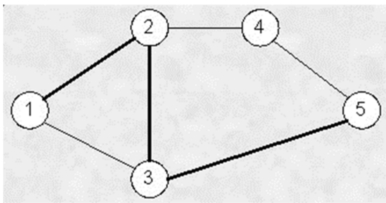
[ABCDECF] egy vonal

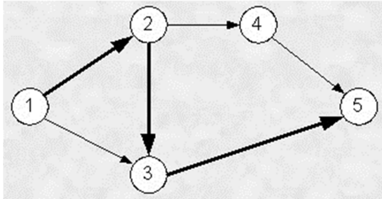
Vonalnak nevezzük a gráf csúcsainak és éleinek azt a sorát, amelyben az élek a megfelelő csúcsokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek (tehát egy csúcs többször is szerepelhet, egy él, nem).

Az **út** a gráfban élek olyan egymáshoz csatlakozó sorozata, melyben sem él, sem pont nem fordulhat elő egynél többször.

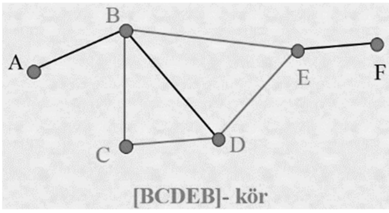
[ABDE]- út

Az út lehet irányítatlan, vagy irányított. **Irányítatlan út**, az élek olyan sorozata, melyben bármely két szomszédos élnek van közös pontja. **Irányított út**, élek olyan sorozata, amelyben bármely él végpontja azonos a következő él kezdőpontjával (kivéve az utolsót).



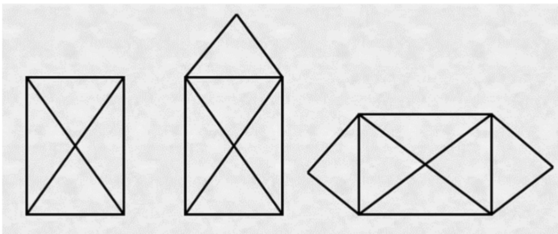


Kör a gráfban**,** a kezdőpontjába visszavezető utat, azaz olyan élsorozatot, amely a kezdőpontjába tér vissza és benne minden él csak egyszer szerepel.



Az **Euler-kör** a gráfelmélet speciális sétáinak egyike. Ha egy gráf MINDEN ÉLÉN pontosan egyszer haladunk át, akkor ezt az utat **nyílt Euler-vonalnak (útnak)** nevezzük. Ha egy gráf MINDEN ÉLÉN pontosan egyszer haladunk át, és visszajutunk a kezdőpontba, akkor ezt az utat **Zárt Euler-vonalnak (útnak)** vagy egyszerűen **Euler-kör** –nek nevezzük.

Ennek kapcsán a következő típusú problémákat fogalmazhatjuk meg: Az alábbi ábrák megrajzolhatóak-e folytonosan egy vonallal? Ha igen, akkor hol kezdődik és hol ér véget a rajzolás?



A kérdés megválaszolásának az elméleti alapját a következő két tétel képezi:

1.Tétel:
A gráf akkor és csakis akkor rajzolható meg egy vonallal úgy, hogy bárhol kezdhetünk, és ugyanoda érünk vissza, ha MINDEN csúcs fokszáma páros szám.

2.Tétel:
Ha egy gráfban pontosan 2 csúcs páratlan fokszámú, a többi páros, akkor a gráf megrajzolható egy vonallal, az egyik páratlan fokszámú csúcsban kezdünk, és a másikba érkezünk.

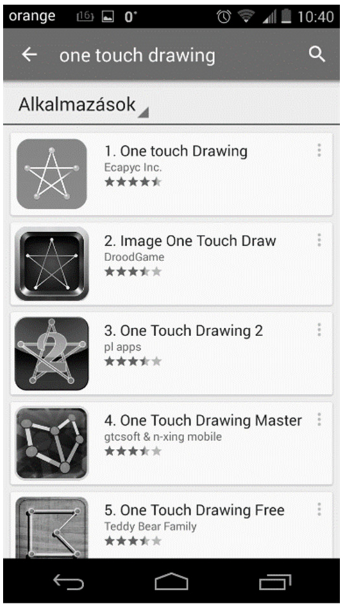
Euler tételeinek következményei:

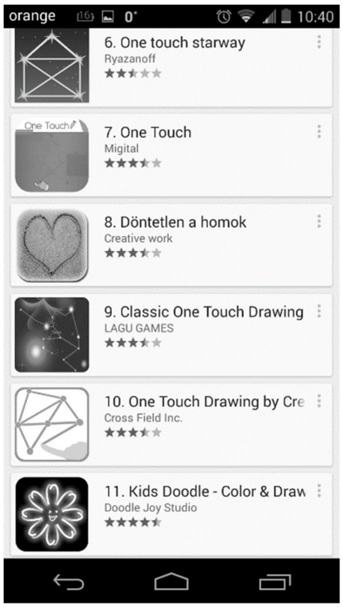
1. Következmény: Ha egy gráfnak 2-nél több csúcsa páratlan fokszámú, akkora gráf NEM rajzolható meg egy vonallal.

2. Következmény: Ha egy összefüggő gráfban a páratlan fokú csúcsok száma 2k, akkor gráfot k közös él nélküli gráfra bonthatjuk. Tehát a gráf egyvonalas megrajzolásánál (k-1)-szer kell felemelnünk a ceruzát, legkevesebb ennyi él nem rajzolható meg, ha egy vonallal rajzolunk.

Amit az okostelefonokon és tabletteken megvalósíthatunk

Az okostelefonon vagy táblagépen menjünk be a **Play Áruházba** és ott a keresőbe írjuk be, hogy **One touch drawing,** ami az egyvonalas megrajzolhatósággal hoz be alkalmazásokat. A keresés után a következőket láthatjuk:





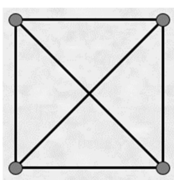
Ezek mind mind olyan ingyenes alkalmazások, amelyek egyvonalas megrajzolásokkal foglalkoznak. Telepítsük sorra őket, és próbálkozzunk, hogy melyiket is szeretjük meg. A programok (játékok) nagymértékben ugyanazt tudják, de másképpen kivitelezve. Minden esetben alakzatokat (gráfokat) kapunk, amelyeket az ujjainkkal kell megrajzolnunk éspedig úgy, hogy minden vonalon pontosan csak egyszer menjünk végig. Ezúttal tehát nem kell a papíron a ceruzával próbálkozni, hanem az újunkkal addig rajzolgatunk, amíg sikerül. A rajzolgatások során kövessük a megrajzolásra kitűzött gráf csúcsainak a fokszámát, mert eszerint könnyebben megrajzolhatjuk.

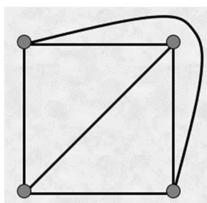
Az Euler tételeinek értelmében azt kell megfigyelnünk, hogy a csúcsok fokszáma mind páros szám-e, vagy van-e 2 páratlan fokszámú. Ha mind páros fokszámúak, akkor kísérletezzük ki, hogy a rajzolást bármelyik csúcsban elkezdhetjük, és ugyanoda érkezünk vissza, ahol elkezdtük. Amennyiben van két páratlan fokszámú csúcs, próbáljuk meg a rajzolást, hogy egy páros fokszámúból indulunk ki. Hamar rájövünk, hogy a próbálkozásaink eredménytelenek. Több próbálkozás után beláthatjuk, hogy valamelyik páratlan fokszámú csúcsban kell elkezdenünk, és a másik páratlan fokszámú csúcsban ér véget a rajzolásunk.

A játék azért is érdekes, mert a programok úgy vannak megszerkesztve, hogy nagyon sok féle gráffal találkozhatunk, szintek vannak, amiket teljesíteni kell, sőt több próba csoportosítva úgymond világokat alkot. Ez a szerkezet arra ösztönzi a tanulókat, hogy egyre több gráfot megrajzoljon, így sok sok tapasztalatot szerez, és egyben érdekes, hasznos és tanulságos időtöltés is. A tanulók szívesen foglalkoztak ezekkel a játékokkal órán kívül is örömmel töltik ezekkel az idejüket.

Az izomorf gráf fogalmának az elméleti háttere

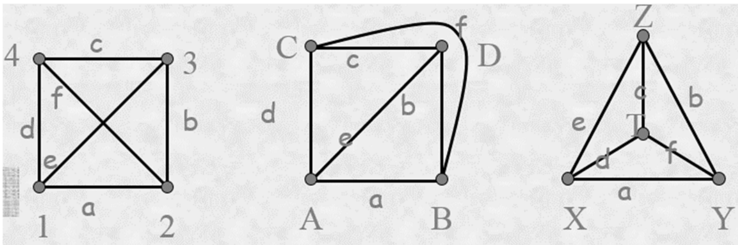
Egy gráf **síkgráf**, ha az éleinek nincsen - a végpontoktól különböző - közös pontjuk (vagyis az élei nem metszik egymást). A következő ábrán egy nem síkgáf illetve ennek síkgráffá való átalakítása látható:





Az ábrán látható két gráf valójában egymással ekvivalens, pontosabban úgy mondjuk, hogy izomorf.

Két gráf **Izomor**f gráf, ha van olyan egyértelmű megfeleltetés melyet izomorfizmusnak hívunk, hogy két csúcs szomszédos *G*- ben akkor és csak akkor, ha a megfelelőik szomszédosak *H*- ban. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a gráfot úgy tekintjük, mintha gumiból lenne, és ennek a csúcsait tetszőlegesen eltolhatjuk, az éleket tetszőlegesen megnyújthatjuk, és az így kapott gráf valójában nem különbözik az eredeti gráftól, úgy mondjuk, hogy azzal izomorf. Három ilyen izomorf gráf az alábbiakban látható:

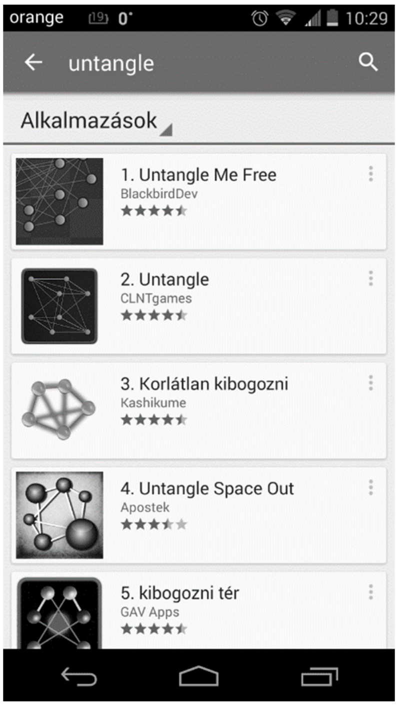


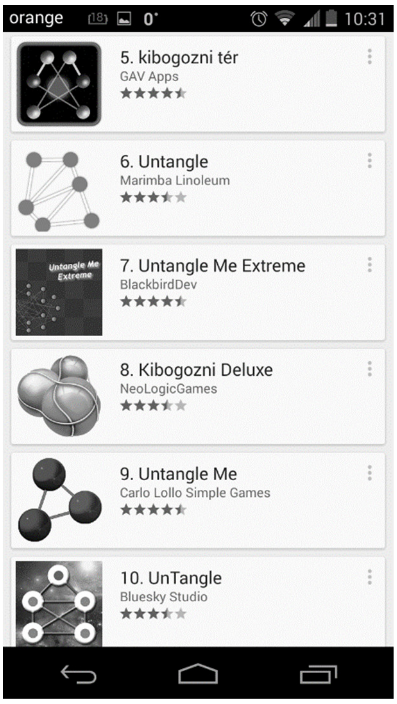
Ezek szerint könnyen belátható, hogy egy adott gráffal végtelen sok izomorf gráf létezik.

Azt, hogy egy adott gráf milyen más gráffal izomorf, nem mindig látható az első ránézésre. Az izomorfizmus megállapításánál figyelembe kell vennünk, hogy csak két azonos csúcsszámmal rendelkező gráf lehet izomorf, de csak akkor, ha a megfelelő pontok mindkét gráfban vagy össze vannak kötve, illetve mindkettőben nincsenek éllel összekötve.

Amit az okostelefonokon és tabletteken megvalósíthatunk

Az okostelefonon vagy a tabletten menjünk be a **Play Áruházba** és ott a keresőbe írjuk be, hogy **untangle** ami kibogozást jelent. A keresés után a következőket látjuk:





Ezek mind olyan alkalmazások (játékok) amelyeknél adott egy gráf, amely általában nem síkgráf, vagyis az élei metszik egymást. A játék célja az, hogy „kibogozzuk” ezt, vagyis úgy csúsztassuk el a gráf csúcsait, hogy egy síkgráfot kapjunk, vagyis egy olyan gráfot, amiben nincs két egymást metsző él. Több ilyen gráf is kapható, és ezek az eredetivel izomorf gráfok. Mi sem jobb alkalmazás az egymással izomorf gráfoknak a gyakorlati megalkotására, mint ezek az alkalmazások. És eközben szórakoztatóak és tanulságosak is egyben, nem csupán a száraz elmélettel találkozunk. Az előbbi játékokban általában az „összebogozódott élek” tehát azok amelyek metszik egymást, más színnel (rendszerint pirossal) szerepelnek, azok amelyek nem metszik egymást, zölddel. Miután egy élet olyan helyzetbe hoztunk, hogy nem metszik egymást, átvált a színe zöldre. Így ez a színegyezmény is könnyebbé teszi a játékot.

A talált játékok között vannak amelyek síkban zajlanak le, de vannak amelyek térben. Érdemes sorra kikisérletezgetni őket, hogy melyik nyeri el a tetszésünket. A megjelenő alakzatok komplexitása egyre fokozódik, rajzokban körülményes lenne ábrázolni, és a vele izomorf gráfot is megalkotni, ellenben cselekvéssel, az újainkkal kell mozgatnunk a csúcsokat - miközben az élek nyúlnak – mindaddig amíg olyan gráfot nem kapunk, amiben nincsenek egymást metsző élek.

A Hamilton utak elméleti háttere

Akkor nevezünk egy utat **Hamilton-útnak**, ha az a gráf *minden csúcsán* pontosan egyszer halad át.

Akkor nevezünk egy utat **Hamilton-körnek**, ha az a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át, és a kiindulási pont megegyezik az érkezési ponttal.

A Hamilton utak esetén is elvárnánk, hogy az Euler utak mintájára, létezzenek az Euler két tételéhez hasonló tételek, ami a csúcsok bejárhatóságáról szól. Nos, a Hamilton utak esetén sajnálatosan nem léteznek ilyen tételek, vagyis Hamilton-körök illetve utak keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus. Léteznek ellenben szükséges illetve elégséges feltételt megadó tételek. Ilyenek például a következők:

SZÜKSÉGES feltétel Hamilton-kör létezésére

Tétel: Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.

ELÉGSÉGES feltétel Hamilton-kör létezésére

Dirac tétele: Ha egy n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma LEGALÁBB n/2, akkor a gráf tartalmaz Hamilton kört (és tehát Hamilton- utat is)

Gyakorlati szempontból ellenben ezek csak korlátozott mértékben segítenek megrajzolni a Hamilton utakat.

Amit az okostelefonokon és tabletteken megvalósíthatunk

Az alkalmazás amit itt használtam, amolyan kakukktojásként jelent meg a kereséseimben, ugyanis a **Play Áruház** keresőjébe beírtam, hogy **One touch Erase block** és az ábrán látható egyetlen játékot hozta elő. A megjelenő játékfelületen a gráfok csúcsai színes kis négyzetek, az élei pedig színes vonalak, de a színeknek ezúttal nincsen semmi szerepük. A játék célja az, hogy egy adott csúcsból kiindulva, az éleken haladva, menjünk át a gráf minden csúcsán. Ez tulajdonképpen egy Hamilton út keresését jelenti. A játék úgy van megszerkesztve, hogy amint egy csúcson áthaladunk, az lehull az ábráról. Természetesen nem kell minden élen áthaladnunk, hiszen nem Euler útról van szó, hanem minden csúcson pontosan egyszer kell áthaladnunk. Amennyiben egy próbálkozásunk kudarcot vallott, a játék visszaáll az eredeti helyzetbe, és újra lehet kezdeni. A játék tehát gyakorlatilag lehetővé teszi egy gráfban egy Hamilton út megkeresését. Ezúttal is több pálya van, és természetesen a nehézségi szintek is változnak, és főleg az jelenti a nehézséget, hogy indulásból nem lehet tudni, hogy mely csúcsból induljunk el és, hogy mely éleket nem kell használni a csúcsok bejárásánál. Éppen ezért is a játék egyben kellemes és hasznos, tanulságos időtöltés.

Végezetül megjegyeznénk, hogy nem csupán ezen három témakör tanítása során tudjuk sikerrel használni az okostelefonokat és tabletteket, ugyanis a **Play Áruházban** a játékok között számos oktatóprogram létezik, csak jól kell tudni keresgélni, és sok más jellegű programra akadunk. Ezek közül megemlítjük például a determináns számoló programokat, a mátrixokkal kapcsolatos programokat, egyenlet rendszerek megoldására szolgáló programokat, grafikus ábrázoló programokat, és nem utolsó sorban az univerzális GeoGebra programot. Javasoljuk tehát minden érdeklődő Olvasónak, hogy Ő egymaga kutasson fel egyre több olyan alkalmazást, amelynek oktató jellege is van, így az okostelefonok és tablettek egyre fontosabb szerepet nyerhetnek a modern oktatási folyamatban.

[1] Tuzson Zoltán: Elsőrendű rekurziós összefüggéssel értelmezett sorozatok tanulmányozása zsebszámológéppel ML9/2012 (322.-329. old)