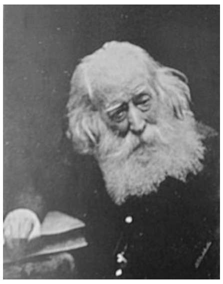
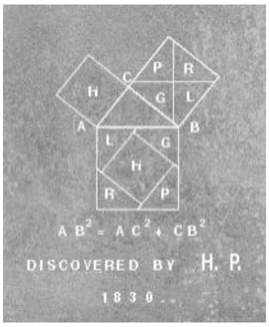
Perigal négyzete

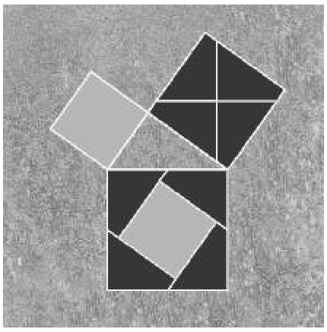
Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely



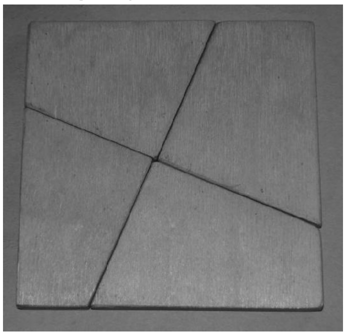
Henry Perigal (1801-1898) matematikus 1873-ban egy nagyon szemléletes bizonyítást mutatott be a Pitagorasz-tételre. Ebben két kisebb négyzetet átdarabol egy nagyobbá, méghozzá nagyon egyszerű módon. Úgy, hogy csak az egyik négyzetet kell felosztani 4 kisebb részre. Később - nem tudni pontosan mikor - ez az átdarabolás lett az alapja az egyik legötletesebb, legegyszerűbben elkészíthető két dimenziós összerakó játéknak, az úgynevezett „Perigal-négyzet”-nek.

A bizonyításának a történetéhez hozzátartozik az is, hogy a Perigal sírkövére belefaragták ezt a bizonyítást:

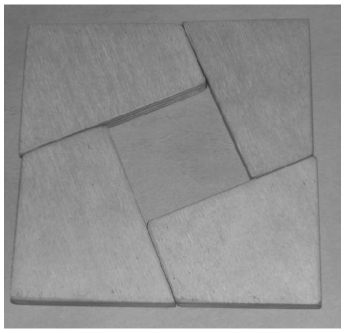




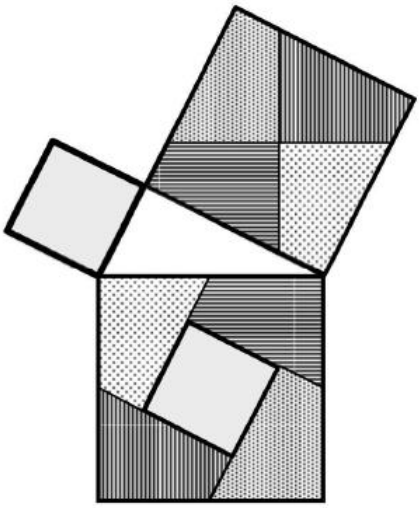
A baloldali ábra a faragott sírkő, a középső a rekonstruálása míg a jobb oldali a kihangsúlyozása, ami tulajdonképpen a bizonyítást képezi, amire részletesebben kitérünk.



A Perigal négyzete a baloldali ábrán látható. Fából is elkészíthető a 4 kongruens négyszögből álló kirakós játék. A négy alakzatot átrendezve megkaphatjuk a jobboldali nagyobb négyzetet, amelynek a közepében szintén négyzet alakú üresség található. (Próbáljuk belátni, hogy az alakzat is és az üreg is valóban négyzet!) Álljon itt most a Pitagorász tételének ezen bizonyítása.



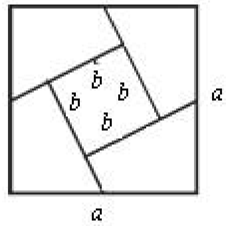
A bizonyítás valóban leolvasható az ábráról:



Legyen ***c*** a jobb felső közepes négyzet oldalának a hossza, ezért annak a területe c^2-tel egyenlő. Rendezzük át a közepes négyzet négy kongruens darabját úgy, hogy az alsó, legnagyobb négyzetet kapjuk, amelynek az oldalhossza legyen ***a***, ezért a területe a^2-tel egyenlő. A nagynégyzet közepébe egy kisnégyzet alakú üresség keletkezett. Ennek a kisnégyzetnek az oldalát jelöljük ***c***-vel, tehát a területe c^2-tel egyenlő. Most készítsünk el egy ***c*** oldalhosszúságú négyzetet. A három négyzetet úgy rakjuk egymás mellé, hogy páronként 2-2 csúcsuk érintse egymást és a legnagyobbik és a legkisebbik négyzet oldala egymásra merőlegesek legyenek, ahogyan az ábrán is látható. Így az ábrán világos színű derékszögű háromszög keletkezik, amelynek oldalai ***a, b, c*** hosszúak. És mivel a nagy négyzet területe egyrészt a^2-nel egyenlő, másrészt pedig a két kisebb négyzetnek a területösszegéből adódik, ami $b^2 + c^2$, ezért máris bizonyítottuk a Pitagorász tételét miszerint ha egy derékszögű háromszög átfogója ***a***, befogói ***b*** illetve ***c*** hosszúak, akkor $a^2 = b^2 + c^2$

(az ábrán a világos színű háromszög). Ezt a műveletet, ahogyan egy alakzatot feldaraboltunk, és átrendezve egyrétűen összeraktunk egy másik alakzatot, átdarabolásnak nevezzük

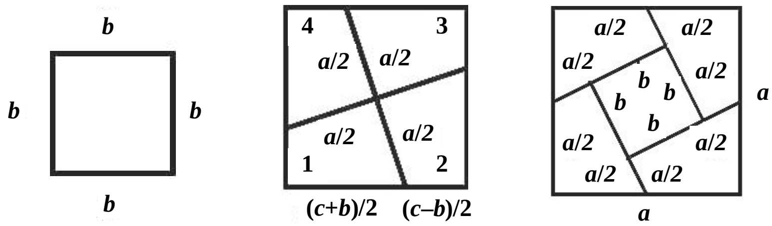
Az előbbi átdarabolásnak a szemléltetését a világhálón például itt tekinthetjük meg: http://www.youtube.com/watch?v=LtkAIQcACqY A kisfilmről az is kiderül, hogy gyakorlatilag hogyan állítható elő a Perigal négyzetének a négy kongruens darabja. Ez úgy történik, hogy a kisnégyzetet a nagy négyzettel koncentrikusan (a középpontjuk egybeessen) helyezzük el, majd a kisnégyzetet elforgatjuk úgy, hogy oldala ne legyen párhuzamos a nagy négyzet oldalaival. Ezután meghosszabbítjuk a kisnégyzet oldalait, amelyek a nagy négyzetből négy kongruens darabot vág ki, és ez a négy alakzat egy négyzetté rakható össze, ami a Perigal négyzete.



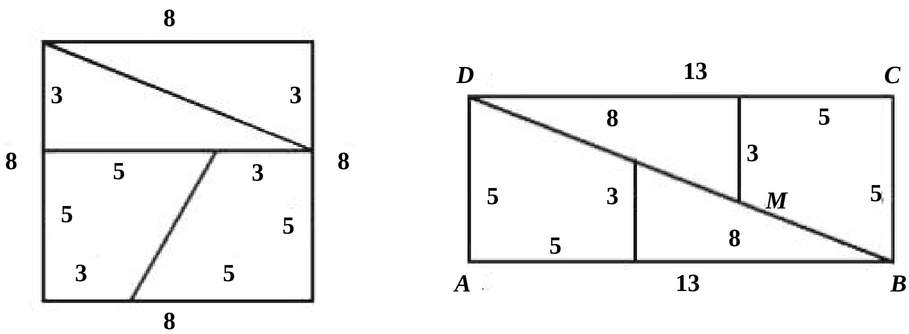
Az előbbiekben bizonyítottak kapcsán könnyen bizonyíthatjuk a következő érdekes feladatot:

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 1$, $n \in N^*$ darab tetszőleges, különböző méretű négyzetlap feldarabolható úgy, hogy a keletkezett darabokból hézagmentesen és egyrétűen kirakhassunk egy négyzetlapot!

Bizonyítás: A bizonyítást a teljes matematikai indukcióval végezzük el. Először is igazoljuk, hogy n=2 négyzet feldarabolható úgy, hogy a darabokból négyzetet rakhatunk ki.



Tekintsük a kisebbik négyzetlapot, ennek az oldala legyen ***b***. A nagyobbik négyzetlap oldala legyen ***c***, és két, egymásra merőleges egyenessel osszuk négy kongruens részre úgy, ahogyan az előbbi ábrán látható (vagyis Perigal-négyzetet készítettünk). Az előbb bizonyítottak alapján az 5 darabból kirakható az olyan ***a*** oldalú négyzet, amelyet az $a^2 = b^2 + c^2$ összefüggésből kapunk meg. Feltételezzük most, hogy ***n*** darab négyzet feldarabolható úgy, hogy a darabokból egy négyzetet rakhatunk ki. Igazoljuk, hogy ez igaz ***n+1*** darab négyzet esetén is. Ez valóban így van, mert ha az *n+1* négyzet közül például a második legkisebb négyzetet úgy daraboljuk fel (Perigal négyzetre) mint a fenti ábrán, akkor a legkisebbikkel összeilleszthető egyetlen négyzetté, így most már csak *n* darab négyzetünk van, amire az indukciós feltétel alapján érvényes az, hogy feldarabolható úgy, hogy a darabokból kirakható egyetlen négyzet. Ezzel a feladatot bizonyítottuk. Az előzőekben bizonyítottak kapcsán, azaz ezek helyességét illetően, nem sok kételyünk merülhet fel, hiszen Pitagorasz tétele a matematika egyik alaptétele. Ha azonban jobban elgondolkodunk az átdarabolás *folyamatán* és a *megvalósítás lehetőségén*, akkor máris felmerülhet a következő kérdés: vajon a darabokból hézagmentesen és fedés nélkül tényleg összerakhatók-e az illető alakzatok? Mielőtt erre a kérdésre válaszolnánk, nézzünk meg egy újabb átdarabolást, amely nagyon meggyőzően alátámasztja, hogy a fölmerült kételyünk teljesen megalapozott. Tekintsük a következő ábrán látható 8 egység oldalhosszúságú négyzetet, amelyet a szemléltetett módon daraboltunk fel.



Ezekből a darabokból rakjuk ki a második ábra téglalapját. Könnyen leolvasható, hogy $AB = 13$ egység és $BC = 5$ egység. Tehát úgy tűnik, hogy az első ábra négyzetlapját átdaraboltuk a második ábra téglalapjába. Vajon tényleg igaz? Nézzünk csak utána! (**Lásd még a MatLap 2/2012-es számának 64. oldalán az F. 17. feladványt**).

A négyzet területe: $T_1 := 8\times 8 = 64$, míg a téglalap területe: $T_2 := 5\times 13 = 65$. Honnan származik a 65 – 64 = 1 négyzetegységnyi eltérés? Ha esetleg milliméteres papíron, pontos mérésekkel rekonstruáljuk az előbbi átdarabolást és ha jól figyelünk, akkor észrevehető, hogy a *BD* átló mentén az alakzatok nem illeszkednek tökéletesen, pontosabban egy kis rés marad. Számolásokkal megmutatjuk, hogy az a kis rés éppen 1 négyzetegység (és mivel elég kicsi, szabad szemmel nehezen érzékelhető). *Tehát valójában a második ábra téglalapja nem illeszthető össze hézagmentesen a 8. ábra négyzetlapjának darabjaiból.*

Az ilyen, hibás átdarabolások során nem csak úgymond hiány állhat elő, hanem éppen fedés is. Például, ha az első ábrán levő 3, 5, 8 mérőszámok helyett rendre az 5, 8, 13 mérőszámokat vesszük, akkor a négyzet területe $T_1 := 13\cdot 13 = 169$, míg a téglalap területe $T_2 := (13+8)\cdot 8 = 168$ lesz, vagyis az átrendezés után nem hézag marad, hanem a darabok fedni fogják egymást. Ennek bizonyítása az előbbiek mintájára is történhet, és az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Ezek után természetesen felmerül a kérdés, hogy mi az átdarabolhatóság helyességének a feltétele?

A következő tétel értelmében a Pitagorasz-tétel bizonyítására használt átdarabolhatóság lehetősége biztosítva van, de a tétel az átdarabolhatóság hogyanjára nem ad választ.

Nyilvánvaló, hogy az átdarabolt alakzatok területei egyenlők. Vajon igaz-e ennek a fordítottja is? Erre a választ (szinte egy időben) **Bolyai Farkas** (1832) és **Gerwin** (1833) adták meg, de egyes források szerint a tétel első felfedezője **Wallace,** angol matematikus volt, aki már 1807-ben közölte a következő eredményt:

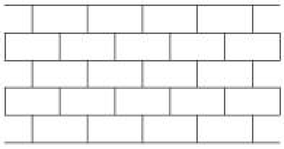
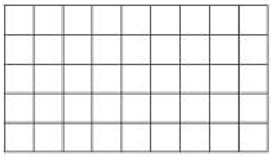
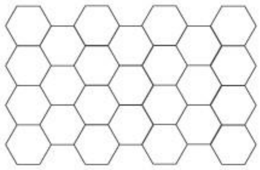
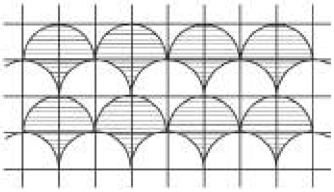
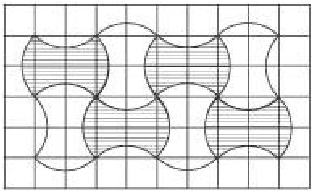
Tétel. *Az egyenlő területű sokszöglapok átdarabolhatók egymásba.*
A tétel kijelenti tehát, hogy ha két sokszöglap egyenlő egyenlő, akkor egymásba átdarabolható. Így igaz a tétel ellentettje is miszerint, ha két sokszöglap területe nem egyenlő, akkor a két sokszöglap nem darabolható át egymásba. Ezért tehát az előző példában a négyzetlap nem darabolható át téglalappá, mert a két alakzat területe nem egyenlő. Ellenben a Pitagorasz tétel bizonyításának a helyessége nem kérdőjelezhető meg, hiszen az épen az átdarabolt alakzatok területének az egyenlőségén alapszik.

Néhány évvel Perigal halála után megfigyelték, hogy a Pitagorasz tételének a Perigal-féle bizonyítása képezi az alapját a későbbi úgynevezett Pitagorasz-féle parkettázásnak (csempézésnek).

A matematikai tárgyalás egyszerűsítése céljából parkettázáson (vagy csempézésen) a síknak síkidomokkal való *egyrétű és hézagtalan* (vagyis hézagmentes) lefedését fogjuk érteni. *Egyrétűnek* nevezzük a lefedést, ha a sík minden pontját legfeljebb egy lefedő idom belső pontja fedi le. (Egy pontot több fedőidom határpontja is fedhet.) *Hézagtalan* a lefedés, ha a sík minden pontját lefedi legalább egy fedőidom belső- vagy határpontja. Parkettázásnál a teljes sík lefedésére gondolunk.

A parkettázás története szinte egyidős az építkezések történetével. Az épületek padozatát régen kődarabokkal rakták ki, ez eleinte találomra egymás mellé rakott laposabb kődarabokból állott, később már faragtak ezeken a köveken, hogy az összeillesztésnél a padozat minél nagyobb része legyen fedett és minél kevesebb legyen a hézag. A fejlődés további folyamán a hézagokat is igyekeztek kiküszöbölni a padozatból a felhasznált kődarabok faragásával.

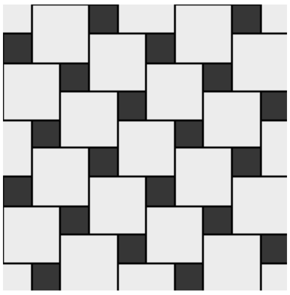
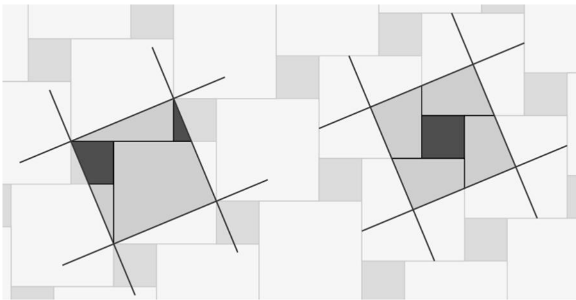
Gyakorlati tapasztalatok alapján rájöttek arra, hogy egyszerűbb a padozat beborítása, ha egyforma, azonos alakú és nagyságú fedőköveket használnak, különösen akkor, ha ezeket pl. agyagból égetik. Néhány ilyen parkettázást mutatnak az ókori lakóépületekből a következő ábrák:

Már ebből az öt, évezredekkel ezelőtt ismert parkettázási módból is a fellépő formák nagy gazdagságára következtethetünk. Máris felmerül a kérdés: *milyen egybevágó idomokból készíthetők parketták* ? Kézenfekvőnek látszik tehát az a gondolat, hogy minden parkettázást sokszögekkel való parkettázásra vezessünk vissza. De persze messziről sem ilyen egyszerű téma a parkettázás. (Bővebben lásd pl az [5]-ben)

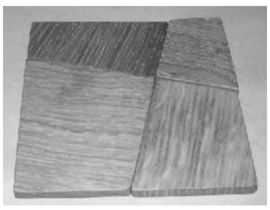
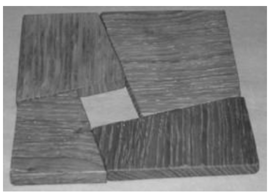
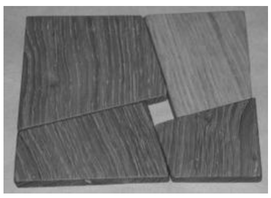
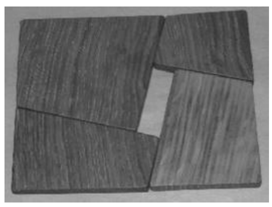
Azt a parkettát (nevezzük még csempét vagy mozaikot) aminek a végtelen ismétlésével előállítjuk a parkettát, *motívumnak* nevezzük. Az előbbi első ábra motívuma egy téglalap, a másodiké egy négyzet, a harmadiké egy szabályos hatszög, stb.

A Pitagorasz parkettázás vagy a „két négyzet parkettázása” az alábbi baloldali ábrán látható:

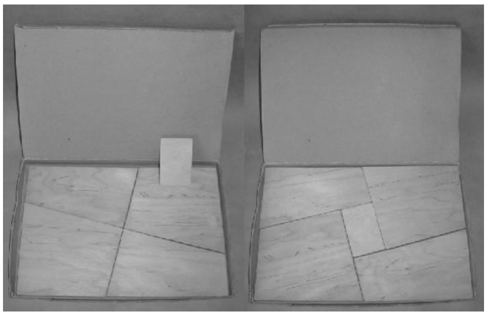
A jobboldali ábrán a parkettán a motívum is meg van jelölve (kettő is, az egyik éppen a Perigal négyzete), ez természetesen többféle is lehet, de minden esetben, a motívumok egymás mellé illesztésével meg kell kapjuk a baloldali ábra parkettázását.

Befejezésül, térjünk vissza ismét a kezdetben bemutatott Perigal négyzetére. Vegyük ennek a négy kongruens alakzatját és próbáljuk úgy összerakni, hogy ne négyzetet, hanem egy általános téglalapot zárjon közre. Némi próbálkozás után hamar rájövünk, hogy sehogyan sem sikerül a téglalapot „bezárni”, vagyis csak „nyitott téglalap” keletkezik. Vajon elvágható-e úgy a négyzet, hogy többféle téglalap is kialakítható legyen a belsejében? A válasz igenlő, de nem egyszerű megtalálni a megoldást. Javaslom a matematika iránt érdeklődőknek, hogy próbálkozzanak ilyen elrendezést találni. Néhány példa a következő ábrákon látható:

Egy másik ötlet az lehet, hogy a Perigal négyzete helyett megpróbálunk egy Perigal téglalapot összeállítani. Hogyan? Pontosan azonos módszerrel, ahogyan Perigal négyzetet szerkesztettünk. Ennek az elvégzését az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Érdekes játékvariációt kapunk, ha nem négyzetből, hanem téglalapból indulunk ki, és készítünk egy Perigal téglalapot.

Ebben az esetben is ügyelni kell a két vágás merőlegességére. Ez is olyan elrendezés, ahol 3 téglalap alakú lyuk lehet a nagy téglalap belsejében. El is készítettük az egyik kis téglalapot, így ez a játék is alkalmas egy "paradoxon-szerűség" bemutatására. Ehhez csak egy dobozba kellett helyezni az elemeket. Egyszer belefért a kis téglalap, egyszer pedig nem. Vajon mi az oka? Gondoljunk csak az előbbiekben bemutatott hamis átdarabolásra!

További érdekes információkat olvashatunk a weben, ha a Google keresőbe beírjuk a „Perigal" szót, és láthatóvá tesszük képek közötti találatokat is.

Szakirodalom és Forrásanyag:

[1] Tuzson Zoltán: Algebrai azonosságok szemléltetése, ML6/1994, 210. old.

[2] Tuzson Zoltán: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat? Harmadik, bővített kiadás, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2011

[3] http://ordoglakat.blog.hu/2010/10/24/perigal_negyzete#more2394598

[4] http://plus.maths.org/content/dissecting-table

[5]http://www.tankonyvtar.hu/konyvek/matematikai-mozaik/matematikai-mozaik-081029-28

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_tiling

[7] http://fac-web.spsu.edu/math/tile/symm/types/p4/p4.htm

[8] http://fac-web.spsu.edu/math/tile/pythagorean/index.htm