Permutáció alkalmazása egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására beláthatatlanul sok klasszikus, általános vagy speciális módszer áll a rendelkezésünkre.

Ebben a paragrafusban olyan egyenlőtlenségek szerkesztéséről és bizonyításáról lesz szó, amelyek összegekre vonatkoznak, és az összeg tagjainak a permutálásával foglalkozunk.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő fogalmakra:

Adott $n \geq 2$ pozitív egész szám esetén az $(a_1, a_2, ..., a_n)$ és $(b_1, b_2, ..., b_n)$ valós számokból álló szám n-eseket

(i) azonos rendezésűnek nevezzük, ha

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ vagy $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$

(ii) ellentétes rendezésűnek nevezzük, ha

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ vagy $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$.

RENDEZÉSI TÉTEL: Legyen $i_1, i_2, ..., i_n$ az $1, 2, ..., n$ számok egy permutációja, és $S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + ... + a_n b_{i_n}$ bármely $n \geq 2$ esetén.

a) Ha $(a_1, a_2, ..., a_n)$ és $(b_1, b_2, ..., b_n)$ azonos rendezésűek, akkor

(A1) $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \leq S \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$ (A2)

(b) Ha $(a_1, a_2, ..., a_n)$ és $(b_1, b_2, ..., b_n)$ azonos rendezésűek, akkor

(E1) $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \geq S \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$ (E2)

Bizonyítás: Ha az S-ben van olyan $a_p b_{i_p}$ és $a_q b_{i_q}$ tag amelyekre $p < q$ és $i_p > i_q$, akkor az azonos rendezés miatt $(a_p - a_q)(b_{i_q} - b_{i_p}) \geq 0$, ahonnan $a_p b_{i_q} + a_q b_{i_p} \geq a_p b_{i_p} + a_q b_{i_q}$ (*)

Legyen S’ az az összeg, amelyet úgy kapunk az S-ből, hogy felcseréljük a b_{i_p} és b_{i_q} értékeket. Így a (*) alapján

$$S' = a_1 b_{i_1} + \ldots + a_p b_{i_q} + \ldots + a_q b_{i_p} + \ldots + a_n b_{i_n} \geq S \ .$$

Mivel az S összeg véges, ezért véges számú ilyen csere után a legnagyobb S összeghez jutunk, amelyben a tagok $a_k b_k$ alakúak. Ezzel az (A2) egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Az (A1) egyenlőtlenség bizonyítása az előző bizonyítás mintájára történik. Az (E1) és (E2) egyenlőtlenségek, az (A1) és (A2) egyenlőtlenséggel ekvivalensek.

PÉLDÁK: Ha $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja, akkor igazak a következő egyenlőtlenségek:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{n-k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{i_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{a_k}$

(3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{a_{n-k+1}} \right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{a_{i_k}} \right) \leq \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{a_k} \right)$

KÖVETKEZMÉNY: Ha az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ valós számokból álló szám n-eseket azonos rendezésűek, akkor $n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right) \geq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$ az úgynevezett Cebisev-féle egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Írjuk fel az b(A2) egyenlőtlenséget az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ következő permutációira:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1 \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \qquad (n)$$

Az (1)-(n) egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak összegezéséből, éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik.

A Cebisev-féle egyenlőtlenség sokirányú alkalmazási lehetőségének ellenére a továbbiakban csupán csak a RENDEZÉSI TÉTEL különféle alkalmazási lehetőségeire mutatunk rá. Az áttekinthetőség könnyítése érdekében általában n=3 választással dolgozunk, de az eredmények kiterjeszthetők n>3 esetre is.

ALKALMAZÁSOK:

1. Ha $x, y, z > 0$, akkor $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (Nesbitt-féle egyenlőtlenség)

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $x \geq y \geq z > 0$. Így az (x, y, z) és $\left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}\right)$ számhármasok azonos rendezésűek. Ezért, az (A2) egyenlőtlenség alapján

$$x \cdot \frac{1}{y+z} + y \cdot \frac{1}{z+x} + z \cdot \frac{1}{x+y} \geq x \cdot \frac{1}{z+x} + y \cdot \frac{1}{x+y} + z \cdot \frac{1}{y+z} \qquad (1) \qquad \text{és}$$

$$x \cdot \frac{1}{y+z} + y \cdot \frac{1}{z+x} + z \cdot \frac{1}{x+y} \geq x \cdot \frac{1}{x+y} + y \cdot \frac{1}{y+z} + z \cdot \frac{1}{z+x} \qquad (2).$$

Az (1) és a (2) egyenlőtlenségek összegezésével éppen a kitűzött feladatot bizonyítottuk. Érdemes észrevenni, hogy az $x \geq y \geq z > 0$ feltételek mellett az (1) és a (2) egyenlőtlenségek által egy-egy különálló feladatot szerkesztettünk.

Megjegyzés: A feladat általánosítható. Legyenek $a_1, a_2, ...a_n$ pozitív számok, és $s = a_1 + a_2 + ... + a_b$. Ekkor $n \geq 2$ esetén $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - a_k} \geq \frac{n}{n-1}$.

2. Ha $x, y, z > 0$, akkor $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+z} \leq \frac{3}{2}$

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $x \geq y \geq z > 0$. Így az (x, y, z) és $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{y+z}\right)$ számhármasok ellentétes rendezésűek. Ezért, az (E1) egyenlőtlenség alapján

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+z}\le\frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z} \qquad (1) \qquad \text{és}$$

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+z}\le\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} \qquad (2).$$

Az (1) és a (2) egyenlőtlenségek összegzésével éppen a kitűzött feladatot bizonyítottuk. Érdemes észrevenni, hogy az $x\ge y\ge z>0$ feltételek mellett az (1) és a (2) egyenlőtlenségek által egy-egy különálló feladatot szerkesztettünk.

3. Ha $x,y,z>0$, akkor $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $x\ge y\ge z>0$.

Mindkét oldalt végigosztva $xyz>0$-val, bizonyítani kell, hogy $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge x+y+z$. Így most könnyebb a számhármasok megválasztása. Ekkor (xy,zx,yz) és $\left(\frac{1}{z},\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)$ számhármasok azonos rendezésűek. Ezért az (A2) egyenlőtlenség alapján $\frac{1}{z}xy+\frac{1}{y}zx+\frac{1}{x}yz\ge\frac{1}{y}xy+\frac{1}{x}zx+\frac{1}{z}yz$ ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. Érdemes észrevenni, hogy a jobboldali tagok újabb cirkuláris permutációja nem hoz új egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: a kitűzött feladatnak van egy másik elemi bizonyítása is, amely a következő: legyenek rendre $xy=a, yz=b, zx=c$ ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ vagyis $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

4. Ha $x,y,z\ge 0$ akkor

(i) $x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$ (ii) $x^3y+y^3z+z^3x\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $x,y,z>0$. Akkor osszunk végig $xyz>0$-val,

bizonyítani kell, hogy

(i) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$ illetve (ii) $\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}\geq x+y+z$. Indokolttá válik az (x^2,y^2,z^2) és $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ ellentétes elrendezésű számhármasok választása. Ha most alkalmazzuk az (A2) egyenlőtlenséget, ennek alapján felírhatók:

$$x^2\frac{1}{x}+y^2\frac{1}{y}+z^2\frac{1}{z}\leq x^2\frac{1}{y}+y^2\frac{1}{z}+z^2\frac{1}{x}\ ,\ x^2\frac{1}{x}+y^2\frac{1}{y}+z^2\frac{1}{z}\leq x^2\frac{1}{z}+y^2\frac{1}{x}+z^2\frac{1}{y}$$

amelyek éppen a bizonyítandó egyenlőtlenségek.

5. Igazoljuk, hogy ha $0\leq x\leq y\leq z$, akkor $2\left(\frac{z}{y}+\frac{y^2}{zx}+\frac{x}{y}\right)\leq\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\leq 2\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right)$

Bizonyítás: Az (x^2,y^2,z^2) és $\left(\frac{1}{yz},\frac{1}{xz},\frac{1}{xy}\right)$ azonos rendezésű számhármasokra alkalmazzuk az (A1) és (A2) egyenlőtlenségeket. Ezek alapján felírhatók, hogy $\min S\leq\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\leq\max S$ (1) és $\min S\leq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\leq\max S$ (2) ahol $\min S=\frac{z}{y}+\frac{y^2}{zx}+\frac{x}{y}$ és $\max S=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}$. Ha most összegezzük az (1) és (2) egyenlőtlenséget, éppen a feladatot bizonyítottuk.

6. Ha $x,y,z>0$, akkor $\frac{x^8+y^8+z^8}{x^3y^3z^3}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (Kvant)

Bizonyítás: A feladat egyenlőtlensége még így írható fel:

$x^5+y^5+z^5\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Ezért indokolt a következő választás.

Alkalmazzuk az (A2) egyenlőtlenségeket az $\left(x^5,y^5,z^5\right)$ és a $\left(\frac{1}{y^3z^3},\frac{1}{z^3x^3},\frac{1}{x^3y^3}\right)$ azonos rendezésű számhalmazokra. Ennek alapján azt kapjuk, hogy

$x^5 \dfrac{1}{y^3z^3} + y^5 \dfrac{1}{x^3z^3} + z^5 \dfrac{1}{x^3y^3} \geq x^5 \dfrac{1}{x^3z^3} + y^5 \dfrac{1}{x^3y^3} + z^5 \dfrac{1}{z^3y^3}$ vagyis $\dfrac{x^8+y^8+z^8}{x^3y^3z^3} \geq \dfrac{x^2}{z^3} + \dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{z^2}{y^3}$. A továbbiakban megpróbáljuk bizonyítani, hogy $\dfrac{x^2}{z^3} + \dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{z^2}{y^3} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Ebből a célból válasszuk meg az $\left(x^2, y^2, z^2\right)$ és az $\left(\dfrac{1}{x^3}, \dfrac{1}{y^3}, \dfrac{1}{z^3}\right)$ ellentétes rendezésű számhármasokat. Ekkor az (E2) egyenlőtlenség alapján $x^2 \dfrac{1}{x^3} + y^2 \dfrac{1}{y^3} + z^2 \dfrac{1}{z^3} \leq x^2 \dfrac{1}{z^3} + y^2 \dfrac{1}{x^3} + z^2 \dfrac{1}{y^3}$ ahonnan éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik.

7. Ha $a,b,c>0$, akkor $\left(a^a b^b c^c\right)^3 \geq (abc)^{a+b+c}$.

Bizonyítás: Ha logaritmáljuk mind a két oldalt azt kapjuk, hogy $aln(a) + bln(b) + cln(c) \geq \dfrac{a+b+c}{3} ln(a) + ln(b) + ln(c)]$. Ugyanakkor, feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c > 0$. Először is igazoljuk, hogy ha $x \geq y > 0$ akkor $x\ln x + y\ln y \geq x\ln y + y\ln x \Leftrightarrow x^x y^y \geq x^y y^x$ (*). Ez, az $(x,y),(\ln x, \ln y)$ azonos rendezésű számpárok alapján, az (A2) állítás alapján, n=2 esetben nyilvánvaló. Most alkalmazzuk a (*) egyenlőtlenséget minden $a \geq b \geq c > 0$ esetén: $a^a b^b \geq a^b b^a, b^b c^c \geq b^c c^b, c^c a^a \geq a^c c^a$ és $a^a b^b c^c \geq a^a b^b c^c$. Ha most összeszorozzuk a négy egyenlőtlenség megfelelő oldalait, akkor éppen a bizonyítandó feladatot kapjuk.

8. Ha $a,b,c>0$, akkor $\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$.

Bizonyítás: Természetesen feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c > 0$. Ha logaritmálnánk az egyenlőtlenséget, ez indokolttá tenné az $(a,b,c),(\ln a, \ln b, \ln c)$ azonos rendezésű számhármasok választását. Így a rendezési tétel alapján rendre felírhatjuk: $a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq b\ln a + c\ln b + a\ln c$ (1) illetve $a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq c\ln a + a\ln b + b\ln c$ (2). Összegezve a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait azt kapjuk, hogy $2(a\ln a + b\ln b + c\ln c) \geq (b+c)\ln a + (c+a)\ln b + (a+b)\ln c$ ahonnan éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\le\frac{1}{a^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{b^3}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\frac{1}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}}$$

Bizonyítás: alkalmazzuk a rendezési tételt az $\left(\frac{1}{a^3\sqrt{a}};\frac{1}{b^3\sqrt{b}};\frac{1}{c^3\sqrt{c}}\right)$ és $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ ellentétesen rendezett sorozatokra! Ekkor felírható, hogy
$$\frac{1}{a^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{b^3}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\frac{1}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{1}{a^3\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b}+\frac{1}{b^3\sqrt{b}}\cdot\sqrt{c}+\frac{1}{c^3\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a}\ge$$
$$\ge\frac{1}{a^3\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{1}{b^3\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{1}{c^3\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ .$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>\frac{3}{2}\ .$$

Bizonyítás: alkalmazzuk a rendezési tételt az $\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}};\frac{1}{\sqrt{c+a}};\frac{1}{a+b}\right)$ és $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ azonosan rendezett sorozatokra! Ekkor felírható, hogy:
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+c}}$$ (1) és

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+a}}$$ (2). Ha most összeadjuk az (1) és (2) megfelelő oldalait azt kapjuk, hogy
$$2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\right)\ge\frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b+c}}\ .$$ És ha most alkalmazzuk, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$ akkor éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk, ahol nem állhat fenn egyenlőség.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha *a, b, c* pozitív valós számok, akkor
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{a+b+c}{3}\ .$$

Bizonyítás: Az egyenlőtlenséget átalakítva azt kapjuk, hogy $2(a^3+b^3+c^3)\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$. Ez indokolttá teszi az (a^2,b^2,c^2) és (a,b,c) azonosan rendezett sorozatok választását. Így a rendezési tétel alapján felírható, hogy:

$a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a$ és $a^3+b^3+c^3\ge a^2c+b^2a+c^2b$.

Ha most összegezzük a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait, éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Befejezésül az érdeklődő Olvasónak a következő feladatok megoldását javasoljuk: pozitív valós számok esetén bizonyítsuk a következő egyenlőtlenségeket

(1) $xy+yz+zx\ge x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$ (2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$

(3) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$

(4) $a+b+c\le\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\le\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$

(5) $a^3+b^3+c^3\ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$ (6) $abc(a+b+c)\le a^4+b^4+c^4$

(7) Ha $0\le x\le y\le z$ akkor $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]$

(8) Ha $0\le x\le y\le z$ és $m=x^5+y^5+z^5$, $M=x^2z^3+y^5+x^3z^2$ akkor

(i) $m\le x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\le M$, (ii) $m\le z^3y^2+y^3x^2+x^3z^2\le M$

(9) Ha $x,y,z>0$ és $A=x^3y+y^3y+z^3x$, $B=x^3z+y^3x+z^3y$ akkor

$x^4+y^4+z^4\ge\max\{A,B\}$ (10) Ha $x,y,z>0$ és $C=\frac{xy^3}{z}+\frac{yz^3}{x}+\frac{z^3x}{y}$,

$D=\frac{x^3y}{z}+\frac{y^3z}{x}+\frac{z^3x}{y}$ akkor $\min\{C,D\}\ge 3xyz$.