Permutációegyenletekről

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az elemi kombinatorikában n elem egy permutációján az n darab elem egy meghatározott sorrendjét (sorbarendezését) értjük. Legyen az n darab elem a következő rendezett A halmaz eleme: A={a_1, a_2, …, a_n}. Matematikailag legtermészetesebben úgy definiálható ekkor az A egy permutációja, hogy az egy f:{1,2,…,n}→A kölcsönösen egyértelmű függvény (minden számhoz 1-től n-ig az A egy és csak egy elemét rendeljük, azaz „sorba rendezzük"). Azonban a felsőbb matematikában mégsem így, hanem a halmazok önmagára való bijektív leképezéseként definiálják a permutációkat (utóbbi definíció nem-megszámlálható halmazokra is értelmes fogalmat ad). Egy permutációt úgy adhatunk meg, hogy zárójelben (általában vesszővel) felsoroljuk az elemeit, vagy például n=5 esetén az f(1)=a_5, f(2)=a_2, f(3)=a_1, f(4)=a_3, f(5)=a_4 permutációt a következő rövidebb alakokban adhatjuk meg:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_5 & a_2 & a_1 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Még rövidebb, ha a második sorban csak az elemek indexeit írjuk ki (mintha azonosítanánk A-t az {1,2,…,n} halmazzal):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A legrövidebben pedig, ha az elemeknek a séma felső sorában szereplő „természetes sorrendjét" is elhagyjuk, és csak a képelemeket írjuk ki: (5, 2, 1, 3, 4). Akadnak szerzők, akik ez utóbbit a permutáció „Descartes-féle alakjának" nevezik. Az így bevezetett permutációkkal végezhető művelet a tankönyvekben is megtalálható permutációk szorzása. Ez a művelet általában nem kommutatív, de asszociatív, van semleges elem az azonos permutáció és minden permutációnak van inverz permutációja. Az n-ed rendű permutációk halmazát S_n-el jelöljük. Az érvényben levő tankönyvekben, továbbá értelmezik és vizsgálják a permutációk transzpozícióit (elemcseréit) és inverzióit. Egy adott σ permutációnak inverzióinak a számát m(σ) jelöli, és az előjelét pedig az $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$ adja, vagyis páros permutáció előjele +1 és a páratlané pedig -1.

Sok esetben a permutációk áthatóbb vizsgálata céljából bevezetik a ciklusok (ciklikus permutációk) fogalmást is. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in S_n$ permutáció egy r hosszúságú ciklus, (vagy r ciklus), ha léteznek az $i_1, i_2, ..., i_r \in \{1,2,...,n\}$ különböző számok úgy, hogy az α leszűkítése az $\{1,2,...,n\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_r\}$ halmazra az identikus függvény, és $\alpha(i_1)=i_2, \alpha(i_2)=i_3, ..., \alpha(i_{r-1})=i_r, \alpha(i_r)=i_1$. Az α ciklus jelölésére az $\alpha=(i_1\ i_2\ ...\ i_r)$ szimbólumot használjuk. Az 1 hosszúságú ciklusok az identikus permutációk, a 2 hosszúságúak pedig a transzpozíciók (cserék). Az $\alpha=(i_1\ i_2\ ...\ i_r) \notin S_n$ és a $\beta=(j_1\ j_2\ ...\ j_k) \notin S_n$ ciklusok akkor diszjunktak, ha az $\{i_1, i_2, ..., i_r\}$ és $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ halmazok is diszjunktak. Továbbá bármely $\sigma \in S_n$ permutáció felbontható diszjunkt permutációk szorzására sőt mi több, transzpozíciók szorzatára is. Bővebben lásd például a [2]-ben.

A továbbiakban bemutatjuk néhány tanulságos, legalább másodfokú permutációegyenlet megoldását. Mint látni fogjuk, az alkalmazott megoldási módszerek általános esetekben is alkalmazhatók. A bemutatásra kerülő feladatok a magasabb fokú permutációegyenletek megoldási módszereinek jobb megértését és elmélyítését szolgálják.

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan $x \in S_7$ permutáció, amelyre

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy a bal oldali permutáció előjele +1, vagyis $\varepsilon(x^2) = (\varepsilon(x))^2 = +1$. A jobboldali permutáció inverziói: (1,2); (1,3); (1,4); (5,6); (5,7). Mivel ezek száma 5 és ez páratlan, ezért a jobboldal előjele -1, így az egyenlőség nem állhat fenn, vagyis a feladatnak nincs megoldása. Ezek szerint tehát levonható egy általános jellegű következmény: annak szükséges feltétele, hogy egy $x^{2k} = \sigma$ permutációegyenletnek legyen megoldása az, hogy $\varepsilon(\sigma) = +1$ legyen. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy ez a feltétel csak szükséges, de nem elégséges.

2. feladat: Az $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ egyenletnek milyen $n \in N^*$ esetén nincs egyetlen megoldása sem az S_n halmazon?

Megoldás: Könnyen belátható, hogy a jobboldali permutáció inverzióinak a száma *n-1* és a megoldhatósághoz szükséges feltétel *n-1= 2k*, tehát a feladatnak nincs megoldása, ha *n-1= 2k-1*, vagyis ha *n= 2k*, ahol $k \in N^*$.

3. feladat: Határozzuk meg azokat az $x \in S_4$ permutációkat amelyekre $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Megoldás: Keressük az x permutációt az $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ alakban. Ekkor az egyenlet alapján $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Most sorra vesszük és letárgyaljuk az $a \in \{1,2,3,4\}$ eseteket. A megoldás során azt, hogy az „az *i*-nek megfelel *j*" jelöljük úgy, hogy „$i \to j$". A permutációk szorzási szabályát alkalmazva, ha *a=1* lenne, akkor $1 \to 1 \to 1$ jobboldalt pedig $1 \to 3$, tehát *1= 3* absurdum. Ha *a=2*, akkor $1 \to 2 \to b$, jobboldalt pedig $1 \to 3$, tehát *b= 3*. Ekkor $2 \to 3 \to c$, ugyanakkor $2 \to 2$, tehát *c=2=a* absurdum. Ha *a=3*, akkor $1 \to 3 \to c$ másrészt $1 \to 3$, ezért *c=3=a* absurdum. Ha *a=4* lenne, akkor $1 \to 4 \to d$ és $1 \to 3$ ahonnan *d=3*. Ekkor $4 \to 3 \to c$ továbbá $4 \to 1$, ezért *c=1* és nem marad más, mint hogy *b=2*. Így a kapott megoldás $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. feladat: Határozzuk meg azokat az $x \in S_4$ permutációkat amelyekre $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Vezessük be az $y = x^2$ változócserét. Az előző megoldáshoz hasonlóan keressük az y permutációt az $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ alakban. Ekkor az $y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ egyenlet alapján $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Most sorra vesszük és letárgyaljuk az $a \in \{1,2,3,4\}$ eseteket. Ha *a=1* lenne, akkor $1 \to 1 \to 1$ jobboldalt pedig $1 \to 4$, tehát *1= 4* absurdum. Ha a=*2*, akkor $1 \to 2 \to b$, jobboldalt pedig $1 \to 4$, tehát b= *4*. Ekkor $2 \to 4 \to d$, ugyanakkor $2 \to 2$, tehát d=*2*=a absurdum. Ha a=*3*, akkor $1 \to 3 \to c$ másrészt $1 \to 4$, ezért c=*4* továbbá $3 \to 4 \to d$ és $3 \to 1$, ezért d=*1*és marad, hogy b= *2* és ekkor a kapott megoldás $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ha a=*4* lenne, akkor $1 \to 4 \to d$ és $1 \to 4$ ahonnan d=*4*=a absurdum.

Most marad megoldani az $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ egyenletet. A 3. feladatban láttuk, hogy ennek a megoldása, és egyben a feladatunknak is a megoldása $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. feladat: Határozzuk meg azokat az x∈ S_4 permutációkat amelyekre $x^{2^k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ahol k∈ N* rögzített.

Megoldás: Vezessük be az $x_1 = x^{2^{k-1}}$ változócserét. Ekkor a megoldandó egyenlet a következő: $x_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. A 3. feladatban láttuk, hogy ennek a megoldása $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tehát $x^{2^{k-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Most vezessük be az $x_2 = x^{2^{k-2}}$ változócserét. Ekkor az $x_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ egyenlethez jutunk. A 4. feladatban láttuk, hogy ennek az y megoldása itt $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Bevezetve a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$és a $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ jelöléseket felírható, hogy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = x^{2^k} = x^{2^{k-2}} = x^{2^{k-4}} = ... = x^{2^0} = x$ ha k=*2n*, vagyis $x = \sigma$ ha k páros. Továbbá $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = x^{2^{k-1}} = x^{2^{k-3}} = x^{2^{k-5}} = ... = x^{2^0} = x$ ha k=*2n+1*, vagyis $x = \tau$ ha k páratlan.

6. feladat: Határozzuk meg azokat az x∈ S_6 permutációkat amelyekre

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a jobboldali permutáció inverzióinak a száma 4, ezért az előjele +1. A továbbiakban igazolni fogjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Ez azt jelenti, hogy a jobboldali permutáció párossága az egyenlet megoldásának létezéséhez nem elégséges, csak szükséges feltétel. A feladatot a 3. és a 4. feladatok mintájára is megoldhatnánk, de a változatosság kedvéért egy más megoldási módszert mutatunk be. Figyelembe vesszük a permutációk szorzását és, hogy az eredmény a jobboldali permutáció. Ezért léteznek olyan $a,b,c,d,e,f \in \{1,2,3,4,5,6\}$ páronként különböző számok amelyekre $1 \to a \to 2$, $2 \to b \to 1$, $3 \to c \to 6$, $4 \to d \to 3$, $5 \to e \to 4$ és $6 \to f \to 5$. Ezt még így is felírhatjuk: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Figyelembe vesszük, hogy a bal oldalon levő két permutáció mindegyike éppen ugyanaz az x permutáció kell legyen. Ha a=*1* $\Rightarrow 1 \to 1$és $1 \to 2$ absurdum. Ha a=*2*$\Rightarrow 1 \to 2$és $2 \to 2$

absurdum. Ha $a=3 \Rightarrow 1 \to 3$ és $3 \to 2 \Rightarrow$ c=2 $\Rightarrow 2 \to 6 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 6 \to 1 \Rightarrow f=1 \Rightarrow 1 \to 5$ absurdum. Ha $a=4 \Rightarrow 1 \to 4$ és $4 \to 2 \Rightarrow d=2 \Rightarrow 2 \to 3 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 3 \to 1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow 1 \to 6$ absurdum. Ha $a=5 \Rightarrow 1 \to 5$ és $5 \to 2 \Rightarrow e=2 \Rightarrow 2 \to 4 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 4 \to 1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow 1 \to 4$ absurdum. Ha $a=6 \Rightarrow 1 \to 6$ és $6 \to 2 \Rightarrow f=2 \Rightarrow 2 \to 5 \Rightarrow b=5 \Rightarrow 5 \to 1 \Rightarrow e=1 \Rightarrow 1 \to 4$ absurdum. Tehát a feladatnak nincs megoldása.

7. feladat: Igazoljuk, hogy az $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2k & 2k+1 \\ 2 & 3 & ... & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}$ egyenletnek egyetlen $x \in S_{2k+1}$ megoldása az $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k-1 & k & k+1 & ... & 2k+1 \\ k+2 & k+3 & ... & 2k & 2k+1 & 1 & ... & k+1 \end{pmatrix}$ permutáció!

Megoldás: Legyen $x(1)=a$. Ha $a=1 \Rightarrow x^2(1) = x(1) = 1 = 2$ absurdum. Hasonlóan $x(1)=2 \Rightarrow$ 2= $x(2)$ is absurdum. Tehát $a>2$. De ekkor $x(2) = x(x^2(1)) = x^2(x(1)) = x^2(a) = a+1$ és így j és t szerinti indukcióval igazolható, hogy $x(j) = a + j - 1$, $\forall j \in \{1, 2, ..., 2k+2-a\}$ és $x(2k+2-a+t) = t$, $\forall t \in \{1, 2, ..., a-1\}$. Ezek alapján azonnal látható, hogy $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2k+2-a & 2k+3-a & ... & 2k+1 \\ a & a+1 & ... & 2k+1 & 1 & ... & a-1 \end{pmatrix}$. De mivel $x(a) = x^2(1) = 2 \Rightarrow$ $2k+4-a=a \Rightarrow a= k+2$ és innen a már jelzett x permutációt kapjuk.

8. feladat: Igazold, hogy bármely $x \in S_n$ permutáció esetén létezik olyan $p \in N^*$ szám amelyre $x^p = e_n$.
Megoldás: Az S_n véges halmaz, aminek $n!$ számú eleme van, hiszen ennyi az n elemnek a permutációinak a száma. Így a $\sigma, \sigma^2, ..., \sigma^m, ...$ sorozatnak nem lehet végtelen számú különböző eleme, tehát $\exists m_1, m_2 \in N$ és $m_1 < m_2$ amelyekre $\sigma^{m_1} = \sigma^{m_2}$. A σ^{m_1} inverzével szorozva, ha $p = m_1 - m_2$ akkor $\sigma^p = e_n$. A diszjunkt ciklusokra bontást használva, p lesz a hosszaiknak a legkisebb közös többszöröse. Ezt az $n!$ értéknél kisebb p számot az x permutáció rendjének nevezik.

9. feladat: Legyen $k \in N^*$ a legkisebb természetes szám amelyre $x^k = e_n$ és $x \in S_n$. Bizonyítsuk be, hogy k az n! osztója.
Megoldás: Legyen $H_0 = \{e, \sigma, \sigma^2, ...\sigma^{k-1}\}$, ez k különböző elemet tartalmaz. Ha létezik $\alpha_1 \in S_n, \alpha_1 \notin H_0$, akkor legyen $H_1 = \{\alpha_1, \alpha_1\sigma, ..., \alpha_1\sigma^{k-1}\}$, és ez is k elemet tartalmaz. Ha még létezik $\alpha_2 \in S_n, \alpha_2 \notin H_0, H_1$ akkor képezzük a k elemű $H_2 = \{\alpha_2, \alpha_2\sigma, ..., \alpha_2\sigma^{k-1}\}$ halmazt, és így tovább. Mivel S_n véges halmaz, ezért létezik egy utolsó ilyen H_p halmaz. Ezután igazoljuk, hogy $H_i \cap H_j = \emptyset$ ha $i \neq j$, és mivel $S_n = H_0 \cup H_1 \cup ... \cup H_p$ és az S_n elemeinek a száma n!, továbbá minden H_i halmaz pontosan k elemet tartalmaz, ezért következik, hogy $n!=(p+1)k \Rightarrow k \mid n!$, éppen amit bizonyítani akartunk.

10. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha k az a legkisebb szám amelyre $x^k = e_n$ és $x \in S_n$, továbbá $x^p = e_n$, $p \in N^*$ is teljesül, akkor p osztható k-val.
Megoldás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy p nem osztható k-val. Ekkor létezik olyan $r \in N, r \neq 0, r < k$ amelyre $p = kq + r$ és így $\sigma^{kq+r} = e \Rightarrow \sigma^p = e$, ami ellentmond annak, hogy k a legkisebb ilyen tulajdonságú szám.

11. feladat: Létezik-e olyan $x \in S_6, x \neq e_6$ permutáció amelyre $x^7 = e_6$?
Megoldás: A 9. feladat alapján fennállna, hogy $k=7$ ossza az $n!$ értéket, ez pedig absurdum.

12. feladat: Határozzuk meg azt a legkisebb $n \in N^*$ számot amelyre $x^n = e_{16}$ ahol

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 7 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mivel egy 16-od rendű permutáció esetén nem várható, hogy eléggé kis n érték esetén álljon elő, hogy $x^n = e_{16}$, ezért valamilyen más módszert kell találnunk az n meghatározására. Megkeressük azt a legkisebb „lépésszámot” amellyel egyidőben 1 az 1. helyre, 2 a 2. helyre,…,16 a 16. helyre kerül. A jobboldali σ permutációt ciklusokra bontva kapjuk, hogy $\sigma =$ (1 2 3 4 5 6) (7 8 9 10 11 12 13) (14) (15) (16). Az első ciklusból látszik, hogy $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$ vagyis 1 hat lépésből kerül az 1. helyre. Ez igaz az első ciklus bármelyik i elemére amely 6 lépés után kerül az i. helyre. Teljesen hasonlóan a második ciklusban levő bármelyik j szám éppen hét lépés után kerül a j. helyre. Tehát az 1,2,3,…,13 számok mindegyike leghamarabb a helyére kerül éppen a 6 és 7 legkisebb többszörösére, vagyis n=6×7=42-re. (Lásd a 8. feladat megoldását is).

13. feladat: Igazold, hogy az $x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletnek nincs megoldása az S_5-ben.

Megoldás: Emeljük harmadik hatványra az egyenlőség mindkét oldalát. Azt kapjuk, hogy $x^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e_5$. Belátjuk, hogy 9 a legkisebb természetes szám amelyre $x^9 = e_5$. Valóban, a 10. feladat szerint ha létezne k<9 szám amelyre $x^k = e_5$, akkor k osztja a 9-et. De ekkor k=1 vagy k=3 kell legyen, de sem $x = e_5$ sem $x^3 = e_5$ nem igaz, ezért $k = 9$ tényleg a legkisebb kért szám. De ekkor a 9. feladat alapján 9 osztja az 5! Számot, ami absurdum. Tehát valóban nincs megoldása az adott egyenletnek. Megjegyezzük, hogy egy második megoldást a 6. feladatnál bemutatott módszerrel is adhatunk. Továbbá a feladat úgy is belátható, hogy belássuk azt, hogy egy permutáció 3. hatványra emelésével nem kaphatunk egyetlen 3 hosszúságú ciklust, mint amilyen a jobboldali permutáció.

Szakirodalom:

[1] Kacsó Ferenc: Algebra Tankönyv a XI. osztály számára, Ábel Kiadó,Kolozsvár, 2006, 14.-16. oldal.
[2] Csapó Hajnalka, András Szilárd: Matematika Tankönyv a XI. osztály számára, Corvin Kiadó, Déva, 2006, 247-252. oldal.
[3] Ion Pertica, Ion Lazar: Probleme de algebra pentru liceu, Vol. III (clasele XI-XII), Editura Petrion, Bucuresti, 15.-16. oldal.