Érdekes pitagoraszi számokról

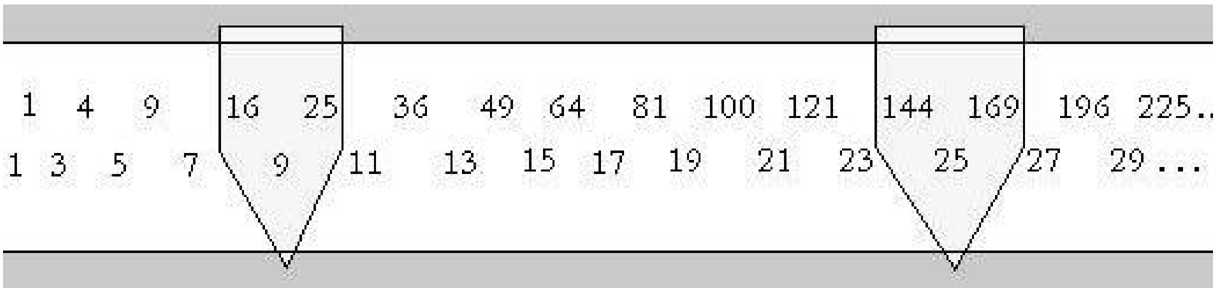
Tuzson Zoltan

Ebben a dolgozatban különböző érdekes tulajdonsággal rendelkező pitagoraszi számhármasokról, szám négyesekről és szám n-esekről írtam. A leírtak alapján is beláthatjuk, hogy akármilyen egyszerű téma is a pitagoraszi számok problematikája, mégis sok sok érdekes, meglepő és tanulságos dolgokat rejteget. Érdemes tehát ezeket feltárni. A jelen dolgozat éppen ilyen érdekességek feltárásával foglalkozik.

Pytagoras (Kr.e. 570 – 495) az egyik legismertebb nevű ókori görög matematikus. Legendákkal körülvett életéről alig tudunk valamit. Samos szigetéről származott, lehet, hogy föníciai volt. Széles látókörű, a tudományokat művelő, a filozófia és a matematika iránt szenvedélyesen érdeklődő személyiség volt. Ismerte Thalész-t, kapcsolatban volt vele. Tanult Egyiptomban és járt Mezopotámiában is. Utazásai után először Számosz szigetére ment, hogy filozófiai iskolát alakítson. Itt azonban ez nem sikerült neki, és ezért a dél-itáliai Krotónban telepedett le, ahol Milón személyében egy gazdag patrónusra talált. Milón nemcsak gazdag volt, hanem korának egyik legerősebb fizikumú embere is. Itt alapította meg tanítványaival a Püthagoreus Testvériséget. Pitagorasz a filozófus szót is ekkor alkotta meg.
A Testvériség tulajdonképpen egy vallási közösség volt, a szám volt imádatuk tárgya. A püthagoreusok a számok vizsgálatát misztikus jelenségekkel kapcsolták össze. Számmisztikájuk az arány fogalmára épült. Az egyes számok maguk is valamilyen fogalom jelképei voltak. Az 5 az emberi mikrokozmosz tökéletes számának tartották. Az 1, 2, 3, 4 és 5 a "világ gyökerét" jelentették, a 10=1+2+3+4 pedig a világ tökéletessége, az istenség volt. Már tudták, hogy a Föld gömb alakú és mozog. Kedvelt mértani alakzatuk és misztikus jelvényük az ötágú csillag, pentagram, a Pitagorasz-féle csillag volt. Érdekesség, hogy a női egyenjogúság hívei voltak, számos nő is volt tagjai között. Az iskola minden tagja átok terhe alatt esküt tett, hogy soha nem fedik fel a világnak matematikai felfedezéseiket. Részben ez a szigorú titoktartás is az oka annak, hogy Pitagoraszt kortársai csak zavaros fejű prófétának tekintették, semmint tudós matematikusnak. Platón is a püthagoreusokat csak életmódjuk miatt dicsérte. Arisztotelész azonban már felismerte és hangsúlyozta Pitagorasz és követőinek matematikus és tudós voltát.

Munkásságáról: a nevét viselő tétel (a derékszögű háromszög befogóira emelt négyzetek területeinek összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével.) nyomaira már előtte felbukkan Egyiptomban és Babilóniában. Pitagorasznak és követőinek számos számelméleti felfedezést is köszönhetünk. Ismerték az első négy tökéletes számot. A püthagoreusok voltak a prímszámok első módszeres tanulmányozói. Eljutottak az irracionális számok felfedezéséig is, de ezt titokként kezelték. Ennek megsértéséért zárták ki soraik közül Hippaszosz-t. Megtalálták a pitagoraszi számhármasok előállításának módját. A számtani középet és a különböző középértékeket is a püthagoreusok vezették be. Már ismertékszabályos testek közül a tetraédert, a kockát és a dodekaédert. Pitagorász és tanítványai a matematikát szakterületekre osztották. (aritmetika, zene, geometria és csillagászat, azaz szám, elrendezés, forma és mozgás). Pitagorasz bizonyítás nélkül kimondta, hogy az egyenlő kerületű síkidomok között a kör területe a legnagyobb, és az egyenlő felületű testek között pedig a gömb térfogata a maximális. Úgy tudjuk Pitagorasz mondta ki elsőként, hogy egy pont körül a sík a szabályos sokszögeknek csak három fajtájával tölthető ki maradéktalanul, a szabályos háromszögekkel, a négyzetekkel, és a szabályos hatszögekkel.

Mint említettük, Pitagorasz nevéhez fűződnek az úgynevezett pitagoraszi számhármasok is. A pitagoraszi számhármasok azok a pozitív egészekből álló (x, y, z) számhármasok, amelyekre $x^2+y^2=z^2$ teljesül. Más szóval az $x^2+y^2=z^2$ diofantoszi egyenlet megoldásai. Ekkor Pitagorasz-tétel értelmében x, y, z egy derékszögű háromszög oldalai. A pitagoraszi számhármasok előállítási módját Pitagorasz követői, a püthagoreusok találták meg:



A felső sorban a négyzetszámok, az alsó sorban pedig a páratlan számok vannak. Az alsó sorban található négyzetszám a felső sorban a "felette" lévő két négyzetszámmal együtt pitagoraszi számhármast alkot.
Azt hogy végtelen sok ilyen számhármas van, Eukleidész bizonyította be először.

A pitagoraszi számhármasok kapcsán leghamarabb azt a kérdést tesszük fel, hogy miként határozható meg az összes pitagoraszi számhármas, ami nem más mint az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet megoldása a pozitív egész számok halmazán? Euklidész bizonyította a következőket:
(1) az $x=p^2-q^2$, $y=2pq$, $z=p^2+q^2$ ($p>q$ és $p,\ q\in N^*$) számhármas teljesíti az $x^2+y^2=z^2$ úgynevezett pitagoraszi egyenletet**.** Továbbá**:**
(2) ha (x, y, z) egy pitagoraszi számhármas, akkor minden $k\in N^*$,akkor (kx, ky, kz) is az.

Tehát az előbbiekből felírható a következtetés, hogy az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet összes megoldása $x=k(p^2-q^2)$, $y=2kpq$, $z=k(p^2+q^2)$ ($p>q$ és $k,\ p,\ q\in N^*$). (*)

Látható, hogy a legkisebb pitagoraszi számhármas a 3, 4, 5. Ez azért is érdekes, mert a benne szereplő számok mind egymásutániak. Nyomban fel is merül a kérdés: van-e még ilyen pitagoraszi számhármas, amelyben a számok egymás utániak? Ha lenne, akkor az teljesítené az $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$ egyenletet, de ebből az $x^2-2x-3=0$ egyenlet adódik, aminek egyetlen pozitív gyöke az x= 3, tehát a 3, 4, 5 egymásutáni számhármas egyedülálló.

Ha az előbbi kérdésre a válasz azonnali volt, keressünk csak olyan pitagoraszi számhármasokat, amelyekben csak y és z az egymás utáni. Ilyen számhármasok például a következők:
$5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$, $9^2+40^2=41^2$, $11^2+60^2=61^2$, $13^2+84^2=85^2$,…
Vajon végtelen sok ilyen számhármas van? Melyek ezek a számhármasok?

1. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $a,\ b\in N^*$ számokat, amelyekre igaz, hogy $a^2+b^2=(b+1)^2$ (1)

Megoldás: Az $a^2+b^2=(b+1)^2 \Leftrightarrow a^2=2b+1$, tehát $a=2n+1$ alakú, ahol $n\in N^*$. Így az egyenletből a $4n^2+4n+1=2b+1$ alapján $b=2n(n+1)$ adódik. Így a keresett tulajdonságú összes pitagoraszi számhármas az $x=2n+1$, $y=2n(n+1)$ és $z=2n(n+1)+1$ ahol $n\in N^*$. Ezekre igaz, hogy $(2n+1)^2+(2n(n+1))^2=(2n(n+1)+1)^2$.

Kalandozzunk el megint a 3, 4, 5 pitagoraszi számhármas kapcsán. Most olyan pitagoraszi szamharmasokat keresünk, amelyekben csak az x és az y egymásutáni számok. Ilyenek például a következő számhármasok:

$20^2 + 21^2 = 29^2$, $119^2 + 120^2 = 169^2$, $696^2 + 697^2 = 985^2$, …

Vajon végtelen sok ilyen számhármas van? Melyek ezek a számhármasok?

2. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $a,\ b \in N^*$ számokat, amelyekre igaz, hogy $a^2 + (a+1)^2 = b^2$ (2)

Megoldás: Az $a^2 + (a+1)^2 = b^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 2 = 2b^2$ egyenletből a $(2a+1)^2 - 2b^2 = -1$ egyenlet adódik, amelyik egy $x^2 - 2y^2 = -1$ alakú, úgynevezett konjugált Pell-egyenlet, erről a [5]-ben írtam. De erről még a [4]-ben is olvashatunk. Erre alapozzuk a következőket. Mivel az $x_0 = y_0 = 1$ az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenletnek egy partikuláris megoldása, ezért az összes megoldását az $x_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1} + (1-\sqrt{2})^{2n-1}}{2}$ és $y_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}}{2}$ összefüggések szolgáltatják, minden $n \in N^*$ esetén. A feladatban szereplő ismeretleneket pedig így kapjuk meg: $2a_n + 1 = x_n$ és $b_n = y_n$, ahonnan $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1} + (1-\sqrt{2})^{2n-1} - 2}{2}$, és $b_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}}{2}$, minden $n \in N^*$ esetén. Ez megadja a feladatunk megoldásait zárt alakban, de nézzük csak a megoldásnak egy szemléletesebb formáját. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ és az $\left(y_n\right)_{n\ge 1}$ sorozatok teljesítik a következő rekurziós összefüggéseket: $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ és $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, és $x_0 = 1,\ x_1 = 7,\ y_0 = 1,\ y_1 = 5$. (3)

Sőt, ezek alapján eljuthatunk a következő rekurziós összefüggésekhez is:

$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, $x_0 = 1,\ x_1 = 7$ valamint $y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$, $y_0 = 1,\ y_1 = 5$. (4)

Most az $2a_n + 1 = x_n$ és $b_n = y_n$ alapján azonnal adódik, hogy $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1$ és $b_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 2$. Figyeljük meg a következő érdekes jelenséget: $a_n^2 + (a_n+1)^2 = b_n^2$ alapján számolásokkal ellenőrizhető, hogy $\left(3a_n + 2b_n + 1\right)^2 + \left(3a_n + 2b_n + 2\right)^2 = \left(4a_n + 3b_n + 1\right)^2$, de ez utóbbi éppen azt jelenti, hogy $a_{n+1}^2 + (a_{n+1}+1)^2 = b_{n+1}^2$. Vagyis egy $\left(a_n, b_n\right)$ megoldás ismeretében eljutottunk egy újabb $\left(a_{n+1}, b_{n+1}\right)$ megoldáshoz. De a (4) alapján azonnal adódik, hogy $a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n + 2$, $b_{n+2} = 6b_{n+1} - b_n$ és $a_0 = 0,\ a_1 = 3,\ b_0 = 0,\ b_1 = 5$ (5)

Mivel $a_1^2 + (a_1+1)^2 = b_1^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$, ezért 3, 4, 5 a legkisebb megoldása a feladatnak. Továbbá az (5) rekurziók alapján $a_1^2 + (a_1+1)^2 = b_1^2 \Rightarrow a_2^2 + (a_2+1)^2 = b_2^2$, ezért az (5) rekurzió megadja a következő megoldást, ami éppen $20^2 + 21^2 = 29^2$, és így tovább, egy $a_n^2 + (a_n+1)^2 = b_n^2$ megoldásból az (5) alapján megkapható a következő megoldás, vagyis $a_{n+1}^2 + (a_{n+1}+1)^2 = b_{n+1}^2$, minden $n \in N^*$ esetén.

Folytassuk tovább a kalandozásunkat az érdekes pitagoraszi számok kapcsán.

Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletet teljesítő pitagoraszi számhármasok mintájára értelmezhetők a pitagorászi számnégyesek, amelyek tulajdonképpen az $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ alakú egyenlet pozitív egész megoldásai. És így tovább, az $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 = x_n^2$ egyenlet pozitív egész megoldásait pitagoraszi szám n-eseknek nevezzük, minden $n \in N^* \setminus \{1, 2\}$ esetén.

A $3^2 + 4^2 = 5^2$ pitagoraszi számhármasok mintájára próbálunk szám n-eseket keresni:

3. feladat: Határozzuk meg az összes olyan pitagoraszi szám n-eseket, amelyek egymás utáni számok!

Megoldás: Tulajdonképpen olyan $x\in N$ és $n\in N^*\setminus\{1,2\}$ meghatározása a cél, amelyekre $(x+1)^2+(x+2)^2+...+(x+n-1)^2=(x+n)^2$ (6)

Elvégezve a számolásokat, figyelembe véve, hogy $1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ (i) és $1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-3)}{2}$ (ii), a (6) alapján kapjuk, hogy:

$$(n-2)x^2+(n-3)nx+\frac{n}{6}(2n^2-9n+1)=0 \quad \text{ahol} \quad n\in N^*\setminus\{1,2\} \qquad (7)$$

1) Ha n= 3, akkor $x^2-4=0$ és ennek egyetlen pozitív megoldása x= 2, amelyre visszakapjuk a $3^2+4^2=5^2$ egyenlőséget.
2) Ha n= 4, akkor a $2x^2+4x-2=0$ egyenletnek nincsen pozitív egész megoldása.
3) Ha $n\geq 5$, akkor a (7) alatti trinom minden együtthatója pozitív, tehát nincsen pozitív egész megoldása.

Tehát, a 3, 4, 5 pitagorászi számhármason kívül nem léteznek egymás utáni számokból álló pitagoraszi szám n-esek.

Visszatérve a $3^2+4^2=5^2$ összefüggéshet, a [2]-ben a következőket olvashatjuk:

$$3^2+4^2=5^2$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$$

Mindegyik sorban csupa egymás utáni számok négyzete szerepel, és minden esetben a bal oldalon n+1 szám, a jobb oldalon n szám szerepel minden $n\in N^*$ esetén. Ezért a következő feladatot fogalmazhatjuk meg:

4. feladat: Határozzuk meg azokat az $x\in N$ és $n\in N^*$ számokat, amelyekre

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+...+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+...+(x+n+n)^2 \qquad (8)$$

Megoldás: Elvégezzük a műveleteket, és használjuk az (i) és (ii) összefüggéseket, így az $x^2-2n^2x-n^2(2n+1)=0$ egyenlet adódik, amelynek az egyetlen pozitív gyöke az $x=2n^2+n$. Ezt az értéket visszaírva a (8) egyenletbe megkapjuk a feladat előtti számpiramis n-edik sorát:

$$(2n^2+n)^2+(2n^2+n+1)^2+...+(2n^2+n+n)^2=(2n^2+2n+1)^2+(2n^2+2n+2)^2+...+(2n^2+2n+n)^2$$

Kalandozzunk tovább a $3^2+4^2=5^2$ pitagoraszi számhármas kapcsán. Mivel $5^2+12^2=13^2$ is igaz, a két összefüggés alapján felírható, hogy : $3^2+4^2+12^2=13^2$. Ez egy olyan pitagoraszi szám négyes, amelyikben van 2-2 egymás utáni szám. Vajon még vannak ilyen tulajdonságú pitagoraszi szám négyesek? Keressünk még ilyeneket!

5. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $a, b\in N^*$ számokat, amelyekre igaz, hogy $a^2+(a+1)^2+b^2=(b+1)^2$.

Megoldás: Elvégezve a hatványra emeléseket azonnal kapjuk, hogy $b=a^2+a$. Így hát, ha *a*= *n*, akkor *b*= *n(n+1)* és $n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2=(n(n+1)+1)^2$ minden $n\in N^*$ esetén. Különböző n értékekre megkapjuk a tulajdonsággal rendelkező pitagoraszi számnégyeseket:

$1^2+2^2+2^2=3^2$, $2^2+3^2+6^2=7^2$, $3^2+4^2+12^2=13^2$, $4^2+5^2+20^2=21^2$, …

Az előző ötlet kapcsán keressünk hasonló tulajdonságú pitagoraszi szám ötösöket is!

6. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $a, b, c \in N^*$ számokat, amelyekre igaz, hogy $a^2 + (a+1)^2 + b^2 + c^2 = (c+1)^2$.

Megoldás: Elvégezve a négyzetre emeléseket azonnal adódik, hogy $2a^2 + 2a + b^2 = 2c$, tehát $c = a^2 + a + \frac{b^2}{2}$ és ez egész szám kell legyen, tehát $b = 2m$, ahol $m \in N^*$, és ha $a = n$, akkor $c = n^2 + n + 2m^2$. Tehát a megoldás számötösre igaz, hogy: $n^2 + (n+1)^2 + (2m)^2 + (n(n+1) + 2m)^2 = (n(n+1) + 2m + 1)^2$. Az $m, n \in N^*$ különböző értékeire különböző pitagoraszi szám ötösöket kapunk.

Belátható, hogy az utóbbi két feladatban használt ötlet tovább is folytatható.

Az előzőekben bemutatott kalandozások kapcsán természetesen merülhet föl a következő kérdés: ha az $x^2 + y^2 = z^2$ összes megoldását a (*) összefüggés adja, milyenek a pitagoraszi szám négyesek és általában a szám n-esek?

Az első kérdésre a választ a [3] –ban megkapjuk, miszerint az $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ egyenletnek az összes, pozitív egészekből álló megoldásai a következők: $x = k(p^2 - q^2 - r^2)$, $y = 2kpq$, $z = 2kpr$, $x = k(p^2 + q^2 + r^2)$, ahol $p^2 > q^2 + r^2$, $k, p, q, r \in N^*$. Látható, hogy ezek a megoldások nagymértékben hasonlítanak a (*) alatti megoldásokra.

A második kérdésre a válasz már komplexebb, ugyanis az $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 = x_n^2$ egyenletnek nem ismerjük az összes pozitív egészekből álló szám n-eseit, ellenben tudjuk, hogy a következő számok megoldásai az egyenletnek: $x_1 = p_1^2 - p_2^2 - ... - p_{n-1}^2$, $x_2 = 2p_1p_2$, $x_3 = 2p_1p_3$, …, $x_{n-1} = 2p_1p_{n-1}$, $x_n = p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{n-1}^2$, ahol $p_1^2 > p_2^2 + p_3^2 + ... + p_{n-1}^2$ és minden betű pozitív természetes számot jelöl. Számolásokkal könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott szám n-es, valóban teljesíti-e az egyenletet.

Ezzel befejezzük kalandozásunkat az érdekes pitagoraszi számok világában.

Szakirodalom:

[1] Dr. Lévárdi László- Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[2] Dr. Lévárdi László- Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[3] Fitos László: Pitagoraszi számnégyesek és szám n-esek, A Matematika Tanítása 5/1983

[4] Gheorghe Udrea: Asupra formei solutiilor ecuatiilor $x^2 - Dy^2 = \pm 1$

[5] Tuzson Zoltán: A k-szögszámoktól a Pell-típusú egyenletekig, Matematikai Lapok, 2/1999, 41.-47. old.