ÖSSZEGEK RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYKÉNT VALÓ FELÍRHATÓSÁGÁRÓL

Dáné Károly tanár, Marosvásárhely és **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

Tekintsük a következő ismert összegezési képleteket:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Megfigyelhető, hogy mindhárom összeg felírható n racionális törtfüggvényeként. Célunk részletesebben megvizsgálni, mely összegek írhatók fel hasonló alakban. A felírhatóságra adunk egy szükséges feltételt, majd további példákat oldunk meg.

A feladat megfogalmazása.

Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat, mely segítségével képezzük az

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

összegeket.

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az S_n összeg felírható n racionális törtfüggvényeként, ha léteznek a P és Q valós együtthatós polinomok úgy, hogy $S_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$.

Feladat. Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat. Döntsük el, hogy az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ összeg felírható-e n racionális törtfüggvényeként!

A feladat részleges megoldása.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak csak véges számú tagja különbözik nullától, vagyis létezik $n_0\in\mathbf{N}$ úgy, hogy $a_n=0$, $\forall\, n\geq n_0$ esetén.

Ha feltételezzük, hogy $S_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, ahol P és Q valós együtthatós polinomok, akkor $n\geq n_0 \Rightarrow S_n=S_{n_0}\Rightarrow \dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{P(n_0)}{Q(n_0)}\Rightarrow P(n)Q(n_0)-P(n_0)Q(n)=0$, tehát az

$$F(X)=P(X)Q(n_0)-P(n_0)Q(X)$$

valós együtthatós polinomnak végtelen sok valós gyöke van (ugyanis $F(n)=0$, $\forall\, n\geq n_0, n\in\mathbf{N}$). Ez csakis úgy lehetséges, ha F azonosan nulla polinom, ahonnan következik, hogy $\dfrac{P(X)}{Q(X)}=\dfrac{P(n_0)}{Q(n_0)}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, vagyis az $S_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ összeg állandó. Innen pedig az következik, hogy $n_0=1$, vagyis az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak legfennebb az első tagja különbözik nullától.

1. tétel. *Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak csak véges számú tagja különbözik nullától, az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ összeg akkor és csakis akkor írható fel n racionális törtfüggvényeként, ha bármely $n\geq 2$ esetén $a_n=0$.*

A továbbiakban olyan $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat vizsgálunk, amelyeknek végtelenül sok nullától különböző tagja van. Ezeket *nemelfajult sorozatok*nak nevezzük.

A racionális törtként való felírhatóság egy szükséges feltételét a következő tétel adja meg.

2. tétel. *Adott az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *nemelfajult valós számsorozat. Ha az* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *összeg felírható* n *racionális törtfüggvényeként, akkor a* $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *általános taggal értelmezett sorozat konvergens és* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy van olyan P és Q valós együtthatós polinom, amelyre $S_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, $\forall\, n \in N^*$, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{P(n+1)Q(n) - P(n)Q(n+1)}{Q(n+1)Q(n)}$ és

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{P(n)Q(n-1) - P(n-1)Q(n)}{Q(n)Q(n-1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n+1)Q(n) - P(n)Q(n+1)}{P(n)Q(n-1) - P(n-1)Q(n)} \cdot \frac{Q(n-1)}{Q(n+1)} \qquad (1)$$

Az $F(X) = P(X+1)Q(X) - P(X)Q(X+1)$ polinom nem azonosan nulla. Ellenkező esetben $a_{n+1} = 0$ $(\forall n \in N)$ eredményre jutnánk, ami ellentmond a feltételnek. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{X\to\infty} \frac{F(X+1)}{F(X)} = 1$. Hasonlóan: $\lim_{X\to\infty} \frac{Q(X-1)}{Q(X+1)} = 1$ és (1) alapján a $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ általános taggal értelmezett sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Alkalmazások.

1) Az $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ összeg (melynek határértéke e) nem írható fel n racionális törtfüggvényeként, ugyanis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. (Ez egy régebbi versenyfeladat, szerzője Dan Vuza.)

2) Az $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ $(q \neq 1)$ összeg nem írható fel n racionális törtfüggvényeként, mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$. Tehát egy nem állandó mértani haladvány összege nem írható fel n racionális törtfüggvényeként.

3) A "Matematika Tanítása" folyóiratban jelent meg a következő feladat (szerzője Csete Lajos):

Vannak-e olyan p és q valós együtthatós polinomok, amelyekre a

$$\frac{d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

egyenlőség minden pozitív egész n esetén teljesül? ($d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak számát jelöli.) .

Megoldás. Ha van ilyen, akkor $d(1)+d(2)+\ldots+d(n)=\dfrac{n\cdot p(n)}{q(n)}$, vagyis $S_n=\sum_{k=1}^{n}d(k)$ n racionális törtfüggvényeként írható fel. De $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d(n+1)}{d(n)}\neq 1$, ami a 2. tétel alapján ellentmondás, tehát a feltételnek megfelelő polinomok nem léteznek.

Megjegyzések. 1) A jegyzet elején felsorolt összegek teljesítik a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ feltételt.

2) A 2. tétel sok esetben nem ad választ a racionális törtfüggvényként való felírhatóság kérdésére. Az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$
$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}$$
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

összegek, általánosabban $1^{\alpha}+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}$ (ahol $\alpha\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{N}$) teljesítik a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ feltételt, de esetükben a 2. tétel alapján nem dönthető el a racionális törtként való felírhatóság kérdése.

SZAKIRODALOM

[1] *D. Andrica, E. Jecan*: Teste de matematică (Editura GIL-Zalău, 1995)

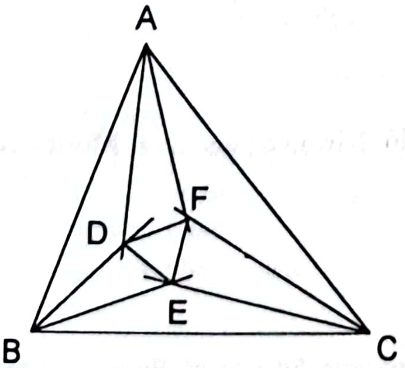
[2] A Matematika Tanítása (2/1996) - módszertani folyóirat

A MORLEY - FÉLE HÁROMSZÖGRŐL

Tamás Sándor tanár, Szecseleváros, Brassó

A Morley-féle háromszög csúcsai, egy háromszög szomszédos szögharmadoló egyeneseinek metszéspontjai. Morley tételének értelmében ez a háromszög egyenlő oldalú. (A tétel mértani bizonyítása megtalálható [1]-ben és [2]-ben.)

Jelen jegyzetben a háromszög oldalainak hosszát határozzuk meg trigonometriai számítások segítségével.



A Morley-féle háromszög meghatározásának értelmében felírhatjuk, hogy $\widehat{ABD}\equiv\widehat{DBE}\equiv\widehat{EBC}$; $\widehat{BCE}\equiv\widehat{ECF}\equiv\widehat{FCA}$; $\widehat{CAF}\equiv\widehat{FAD}\equiv\widehat{DAB}$.

Az ABD háromszögben a szinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{3}}=\frac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{C}{3}\right)}\Rightarrow BD=\frac{c\cdot\sin\frac{A}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{C}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{C}{3}}=$$

$$=\frac{2c\sin\frac{A}{3}}{\sqrt{3}\cos\frac{C}{3}-\sin\frac{C}{3}}.$$