Kér rokon számlálási probléma általánosítása

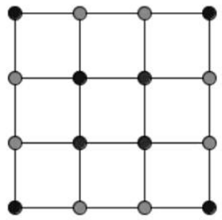
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a dolgozatban két rokon számlálási probléma általánosításával foglalkozunk. Kezdjük az első problémával!

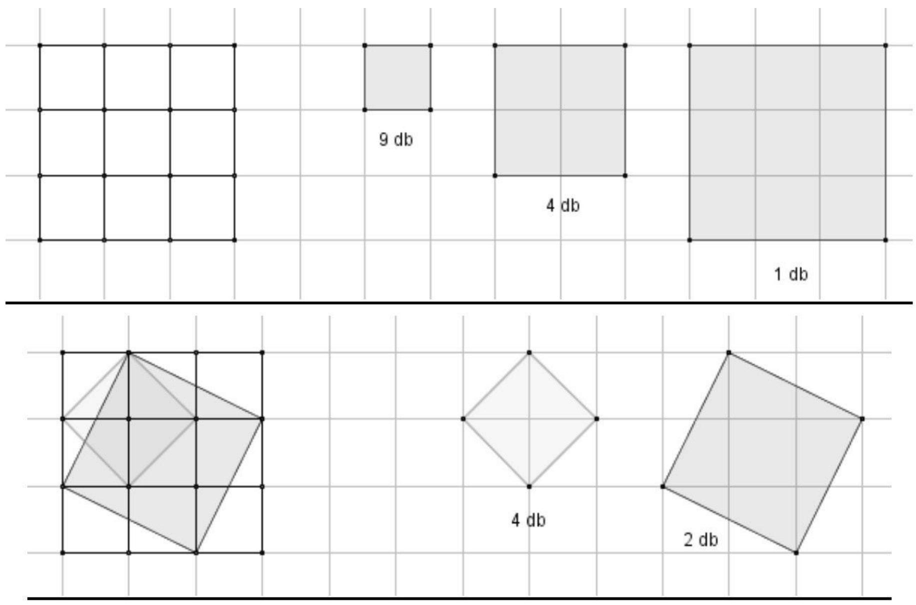
1. Négyzetek a rácshálózaton

A 2015-2016-os Brenyó Mihály Országos Pontszerző Matematika Verseny III. fordulójában a 3.-4. osztályos tanulók részére kitűzött 3. feladat a következő volt:

„Hány különböző négyzetet rajzolhatunk az alábbi négyzetrácsra, ha a négyzet csúcsai illeszkednek a négyzetrács rácspontjaira? (Két négyzet különböző, ha legalább egy csúcsuk különböző.) Rajzokkal válaszolj!”



A feladat megoldása még ezen a szinten sem okoz gondot főleg ha figyelembe vesszük, hogy ferde helyzetű négyzeteket is rajzolhatunk, és ekkor a válasz a következő ábrákról olvasható le:



Tehát összesen 9+4+1+4+2=20 négyzetet rajzolhatunk a rácspontokra.

A továbbiakban az előző feladatot fogjuk általánosítani, amikor a 4×4-es rács helyett (n+1)×(n+1) rácspontból álló rácshálózatról van szó, ahol $n \geq 1$ természetes szám. Látni fogjuk, hogy ez az általánosítás nagyon tanulságos és érdekes lesz.

Már az előző feladat megoldása során láttuk, hogy tulajdon képpen két részfeladatról van szó. Az egyik az, amikor a vízszintes helyzetű négyzeteket számoljuk meg, a másik pedig az, amikor a ferde négyzeteket számoljuk meg. Az általánosítás során is így járunk el, ezért megfogalmazzuk a következő két segédfeladatot:

1. feladat: Legyen n ≥ 1 természetes szám. Hány különböző négyzetet rajzolhatunk egy $n \times n$-es négyzetrácsra, ha a négyzet csúcsai illeszkednek a négyzetrács rácspontjaira, és a négyzet oldalai csak vízszintesek vagy függőlegesek lehetnek?

Megoldás: Az 1×1-es kisnégyzetekből éppen n×n = n^2 darab található. Most nézzük a 2×2-es méretű négyzeteket. Ezekből soronként n − 1 darab van, és lefele n − 1 sorunk lesz, ezért összesen (n − 1) × (n − 1) = $(n-1)^2$ darab 2 × 2-es kisnégyzetünk lesz. Ezt az eljárást folytatva az (n−1)×(n−1)-es négyzetből, 2 sorban, soronként 2 van, azaz összesen 2 × 2 = 2^2. Végül az n × n-es négyzetből 1 darab van, és ezzel megkaptuk, hogy az n × n-es látható V(n) vízszintes négyzetek száma:

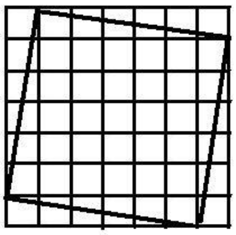
$$V(n)=1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \quad (1)$$

A megoldás során szintetikusan is gondolkodhattunk volna, például így: Jelöljünk ki a négyzetrács bal felső sarkában egy k×k nagyságú négyzetet. Ezt a négyzetet egyesével (n-k)- szor lehet jobbra léptetni a négyzetrács jobb oldalának az eléréséig. Ha ehhez a számhoz hozzáadjuk a kezdeti 1 pozíciót, akkor megvan a vízszintesen megszámlálható négyzetek száma éppen (n-k+1). Mivel négyzetrácsról van szó, ezért függőlegesen, az oszloponként is ugyanennyi van. Innen adódok tehát, hogy az összes látható négyzetek száma:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.feladat: Legyen n ≥ 1 természetes szám. Hány különböző négyzetet rajzolhatunk egy $n \times n$-es négyzetrácsra, ha a négyzet csúcsai illeszkednek a négyzetrács rácspontjaira, és a négyzet oldalai nem vízszintesek és nem függőlegesek?

Megoldás: Tehát úgymond ferde négyzetektől van szó. Az általános eset jobb megértése végett, figyeljük meg részletesen az előbbi 3×3-as esetet. Az előző feladat alapján tehát a vízszintes elhelyezkedésű négyzetek száma $9+4+1=1^2+2^2+3^2$. Most a ferde helyzetű négyzetek számát fogjuk megállapítani. A megoldás lényege a következő: minden ferde négyzetet úgy tekinthetünk, mint egy négyzet kerületére írt négyzetet. Például, a mellékelt ábrán levő ferde négyzetet úgy tekintjük, mint egy 7×7-es négyzet kerületére írt négyzetet. Ha most a ferde négyzet bal felső csúcsát a rácspontokon jobb fele léptetjük egyet, akkor éppen 6 ilyen méretű, de különböző négyzetet kapunk.



Visszatérve a 3×3-as feladatra: a vízszintes 2×2-es négyzet mindegyikébe 1-1 ferde négyzetet írhatunk, ezért van belőlük 4 darab. A 3×3-as vízszintes négyzet kerületére 2 darab egyforma négyzetet rajzolhatunk. Összefoglalva tehát, az n×n-es rácson ha $F(n)$-el jelöljük a ferde négyzetek számát, és $S(n)$-el az összes négyzetek számát, akkor felírható, hogy: $F(n)=4+2=1^2\times 2+2^2\times 2$ tehát $S(3)=1^2+2^2+3^2+F(3)=1^2+2^2+3^2+1^2\times 2+2^2\times 2=20$. A kapott eredmény könnyebb általánosíthatósága végett fogalmazzuk meg ezt az eredményt 4×4-es esetben. Ekkor ez írható:

$S(4)=1^2+2^2+3^2+4^2+F(4)=1^2+2^2+3^2+4^2+1^2\times 3+2^2\times 2+3^3\times 1$. Így most már kialakul az általános képlet megfogalmazása is, amit nem kell indukcióval bizonyítanunk, hiszen a magyarázat direktbe megfogalmazható n×n-es rács esetén is. Tehát n×n-es rács esetén

$$F(n)=1^2\times(n-1)+2^2\times(n-2)+\ldots+(n-2)^2\times 2+(n-1)^2\times 1$$

Ezt az összeget fogjuk most zárt alakra hozni:

$F(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)=n\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^3=n\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}$. Ha most elvégezzük a számolásokat azt kapjuk, hogy $F(n)=\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

<u>3. feladat</u>: Legyen n ≥ 1 természetes szám. Hány különböző négyzetet rajzolhatunk egy $n\times n$-es négyzetrácsra, ha a négyzet csúcsai illeszkednek a négyzetrács rácspontjaira?
Megoldás: Vegyük észre, hogy nincs más dolgunk, mint összeadjuk a két előző feladat eredményét, vagyis $S(n)=V(n)+F(n)$ ami azt jelenti, hogy $S(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n^2-1)}{12}=\frac{n(n^3+4n^2+5n+2)}{12}$.

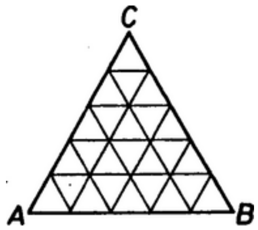
Ezzel általánosítottuk a feladatot, és az is belátható, hogy ha $n=3$ akkor $S(3)=20$ valóban igaz.

2. Háromszögek a rácshálózaton

A probléma ezúttal nem a négyzetrácsos hálózaton, hanem a szabályos háromszögrács hálózaton lesz tárgyalva.

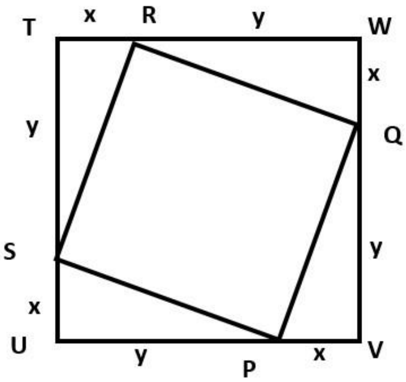
A KöMaL 3/1992/március, 126. oldal, GY: 2763. feladata a következő:

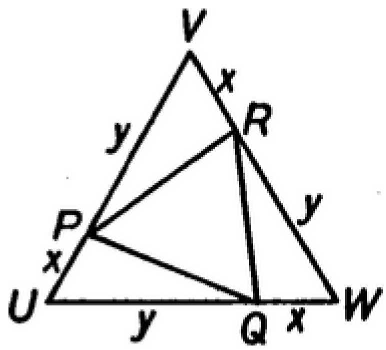
Egy szabályos háromszög minden oldalát 5 egyenlő részre osztottuk, majd az osztópontokon át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket rajzoltunk. Ezeknek az egyeneseknek és a háromszög oldalainak a háromszög belsejében és kerületén 21 metszéspontjuk van. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa ezen metszéspontok egyike?



A probléma megoldása nagyon hasonlít az előző probléma megoldására. A vízszintesen elhelyezkedő háromszögek módszeres megszámlálása nem tűnik nehéznek, és valójában nem is az. Ellenben vannak ferde (elcsavart) szabályos háromszögek is! Ezeknek a megszámlálása valamilyen jó módszert igényel. Ez meg fog egyezni azzal a módszerrel amit a négyzetek esetén alkalmaztunk: minden ferde háromszöget, úgy tekintünk, mint egy szabályos háromszögbe „beírt” háromszöget!

Ismételjük csak hát, hogy is jártunk el a négyzetrács esetén.



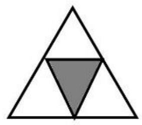


Minden PRS ferde négyzetet úgy tekinthetünk, hogy bele van írva, egy rácsnégyzetbe, amelyeknek a méretei 1×1-től $n\times n$-ig változnak, és természetesen a beírt négyzet csúcsai a $k\times k$ méretű négyzet kerületén vannak. Ezután, az R csúcsot a T-től kezdve a rácson léptetjük a W felé, mással a PQRS négyzetet „forgatjuk” (és nyújtjuk is) úgy, hogy a csúcsok megmaradjanak az UVWT négyzet kerületén. Így egy $k\times k$ méretű UWVT négyzet esetén, éppen $k-1$ beleírt különböző ferde PQRS négyzetet kapunk.

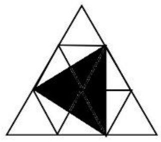
A szabályos háromszögek esetén pontosan ugyanígy járunk el. Itt is léptetjük például a P csúcsot az UV oldal rácspontjain, és ezzel egyidőben természetesen az R és a Q csúcsokat is, vagyis a PQR háromszögek forgatva változnak. Itt is belátható, hogy amennyiben az UVW rácsháromszög $k\times k$ méretű, úgy $k-1$ beleírt különböző ferde PQR szabályos háromszöget kapunk, minden $k\in\{1,2,...,n\}$ esetén.

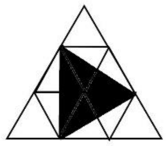
Mielőtt azonban általánosítanánk a feladatot, előbb oldjuk meg a kitűzött sajátos esetet, amikor $n=5$. Jelölje rendre $\Delta(1)$, $\Delta(2)$, ..., $\Delta(5)$ az 1, 2, ..., 5 egységnyi oldalhosszal rendelkező Δ helyzetű háromszögek számát, amibe még beleszámoljuk az illető háromszögbe beleírt ferde érintő háromszögeket is.

Természetesen $\Delta(1)=1+2+3+4+5=15$, továbbá nézzük a $\Delta(2)$ értékét: az ábrán látható 2 egységnyi oldallal rendelkező háromszögből az eredeti rajon éppen $1+2+3+4=10$ darab van, de mindegyikben van egy beírt „szürke" kisháromszög (így a fordított állású 1 egységoldalú háromszögeket is megszámoltuk, nemcsak a Δ helyzetűeket). Tehát $\Delta(2)=2\cdot 10=20$.

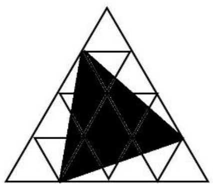


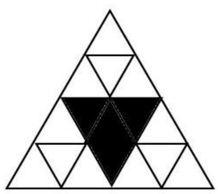
Nézzük most a $\Delta(3)$ értékét. Az eredeti ábrán a 3 oldalegységnyi szabályos háromszögből $1+2+3=6$ darab van, és mindegyikben van $2-2$ ferde háromszög, amint az ábrán is láthatóak. Tehát $\Delta(3)=6+2\cdot 6=3\cdot 6=18$

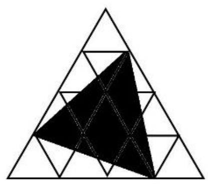




Nézzük most a $\Delta(4)$ értékét. Az eredeti ábrán a 4 oldalegységnyi szabályos háromszögből 3 darab van, a három csúcsnál. Nézzük most a beleírt háromszögeket:







Belátható, hogy ezekből éppen 3 különböző van, így $\Delta(4)=3+3\cdot 3=4\cdot 3=12$.

Továbbá könnyen belátható, hogy 1 darab 5 egységnyi háromszög van, és ebbe beírva még van 4 darab. Tehát $\Delta(5)=1+4\cdot 1=5\cdot 1=5$. Tehát a feladatunkra a válasz: $S(5)=1\cdot 15+2\cdot 10+3\cdot 6+4\cdot 3+5\cdot 1=70$ háromszög a válasz.

Az előző választ tudatosan írtuk az előbbi alakba, ugyanis így könnyű az általánosítás, ugyanis az $1, 2, 3, 4, 5$ egymás utáni számok melletti szorzótényezők éppen az úgynevezett „háromszög-számok", vagyis ha $t_1=1=\frac{1\cdot 2}{2}$, $t_2=1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$, $t_3=1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$ és általában $t_n=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Ekkor tehát az előző összeg kiemelt formában így írható: $S(5)=1\cdot t_5+2\cdot t_4+3\cdot t_3+4\cdot t_2+5\cdot t_1=\sum_{k=1}^{5}(6-k)t_k=\sum_{k=1}^{5}(6-k)\frac{k(k+1)}{2}$. Tehát tulajdonképpen $\Delta(m)=\frac{(5+1-m)(5+2-m)}{2}, \ \forall m\in\{1,2,3,4,5\}$. Így hát a feladat általánosításának az összegét a következőképpen kapjuk meg: $S(n)=\sum_{k=1}^{n}(6-k)\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(6\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$.

És mivel $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ezért számolások után kapjuk, hogy

$S(n)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}=C_{n+3}^{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén. Természetesen, ha $n=5$ akkor $S(5)=70$ adódik, ami éppen a kitűzött feladat megoldása.