Szélsőérték problémák elemi megoldása

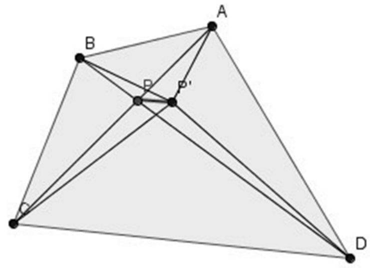
II. rész

Geometriai szélsőértékek

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

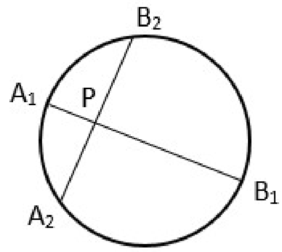
Ebben a részben geometriai problémák szélsőértékeinek a megállapításával foglalkozunk, a síkgeometriai vizsgálatokat részesítve előnybe. Ezúttal is csak elemi módszerekkel bizonyítunk, mellőzve a felsőbb matematikai fogalmakat, ismereteket, számolásokat.

1. **példa**: Az ABCD konvex négyszög belsejében keressük meg azt a P pontot, amelyre a PA+PB+PC+PD összeg minimális.



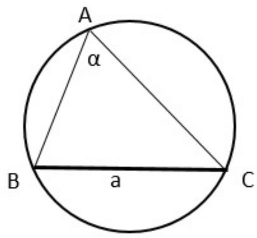
Megoldás: Igazolni fogjuk, hogy a szóban forgó P pont éppen az AC és BD átlók metszéspontja lesz. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy az átlók metszéspontján kívül létezik olyan P' pont amelyre P'A+P'B+P'C+P'D < PA+PB+PC+PD. A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy
P'A+ P'C > AC = PA+ PC és P'B+ P'D> BD= PB+ PD és ezek összegzéséből adódik, hogy P'A+P'B+P'C+P'D> >PA+PB+PC+PD és ez ellentmondás.

2. **példa**: Adott körlemeznek egy tetszés szerinti pontjában rajzoljuk meg a legnagyobb és a legkisebb húrt!



Megoldás: Legyen P a körlemez egy adott pontja. Nyílván való, hogy ezen át húzott leghosszabb húr éppen az átmérő lesz, legyen ez A_1B_1 . Legyen most A_2B_2 egy másik húr, amelyik áthalad a P ponton. A pontnak a körre vonatkozó hatványa szerint ellenben $A_1P\cdot PB_1 = A_2P\cdot PB_2 = \acute{a}lland\acute{o}$.
De a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $A_2B_2 = A_2P + PB_2 \geq \sqrt{A_2P\cdot PB_2} = \acute{a}lland\acute{o}$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $A_2P = PB_2$ de ez csak akkor igaz, ha az A_2B_2 húr merőleges az A_1B_1 húrra.

3. **példa**: Azon háromszögek közül, amelyek egyik szöge α, a vele szemközti oldala a, szerkesszük meg a legnagyobb kerületűt!



Megoldás: Tehát a szóban forgó ABC háromszög A szöge α nagyságú, és BC oldala a nagyságú, adott szakasz. Ezek szerint az A pont egy olyan körön változik, amelyben a BC egy húr, és az A csúcs a körön van, α nagyságú kerületi szög. A szinusz tétel alapján

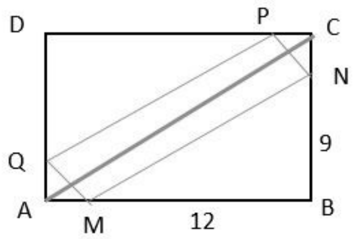
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Mivel $\frac{a}{\sin\alpha}$ állandó, ezért az R is állandó.
Továbbá $b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$ ahonnan kapjuk, hogy

$$b + c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4R\cos\alpha\cdot c\,\mathrm{os}\frac{B-C}{2} \leq 4R\cos\alpha = \acute{a}lland\acute{o}$$

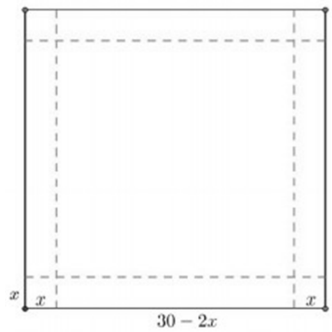
Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $c\,\mathrm{os}\frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow B = C$ vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

4. **példa**: Egy téglalap oldalai 12cm illetve 9cm hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapba írható négyszögek kerülete legalább 30cm!

Megoldás: A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négyzet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.

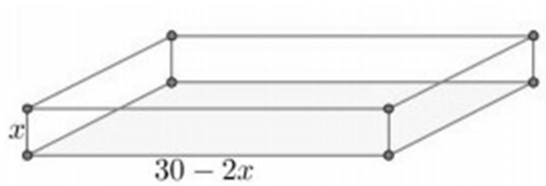


A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négyzet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.



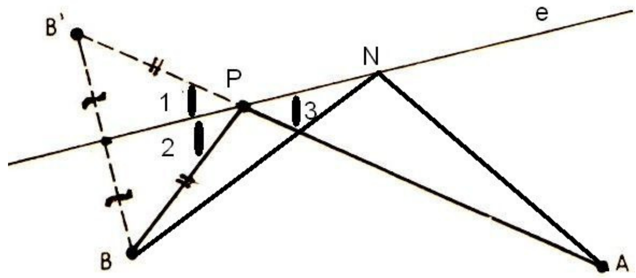
5. **példa**: Egy 30 cm oldalú négyzet négy sarkából vágjunk le négy egybevágó négyzetet úgy, hogy a lap négy szélének a felhajtásával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjunk! Adjuk meg ennek a térfogatát!

Megoldás: Jelöljük x-el a levágandó kis négyzet oldalának a hosszát. A doboz méretei a mellékelt ábrán láthatók. Ennek a térfogata $V=(30-2x)^2 x$ ahol *0< x< 15*. Ekkor felírható, hogy $4V=(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x$, és mivel $30-2x+30-2x+4x=60=\acute{a}lland\acute{o}$, ezért az $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ egyenlőtlenség alapján $\sqrt[3]{4V}=\sqrt[3]{(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x}\leq\frac{60}{3}=20$. Így hát $V_{\max}=20\cdot 20\cdot 5=2000$ és egyenlőség csak $30-2x=4x\Leftrightarrow x=5$ esetben áll fenn.

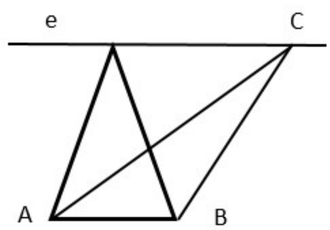


6. **példa**: Adott egy *e* egyenes és egyik az egyik oldalán két különböző pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen azt a P pontot, mely esetén az APB törött vonal hossza minimális. (**Héron problémája, vagy tükrözési elv**)

Megoldás: Bebizonyítsuk, hogy azon P pontra minimális az összeg, amelyre $\widehat{ePA}=\widehat{ePB}$



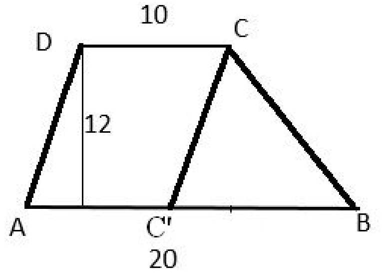
A B pontot tükrözve az e egyenesre, a B' pontot kapjuk, amire igaz, hogy AP+ PB= AP+ PB′, így az AP+ PB′ minimuma pedig úgy áll elő, hogy P rajta van AB'-n amikor is $\widehat{P_1}=\widehat{P_2}=\widehat{P_3}$. Másfelől, ha N az e egyenesnek a P ponttól különböző pontja, akkor megmutatjuk, hogy NA+NB> PA+PB. valóban, mivel NA= NA′ és AP=AP′, a fenti reláció A′N+NB>A′B-vel egyenértékű, ez pedig a háromszög egyenlőtlensége alapján igaz.



7. **példa**: Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő alapú, és egyenlő területű háromszögek közül az egyenlő szárúnak a legkisebb a kerülete.

Megoldás: Legyen az A és B pont a két rögzített pont. Mivel az ABC háromszög területe állandó, ezért a C csúcs egy olyan e egyenesen mozog, amelyik párhuzamos az AB egyenessel. Ha a CA+CB összeg minimális, akkor a tükrözési elv szerint $\widehat{ACe} = \widehat{BCe}$, ez pedig csak CA=CB esetben lehet igaz.

8. példa: Legalább mekkora annak a trapéznak a kerülete, amelynek alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, magassága pedig 12 cm?



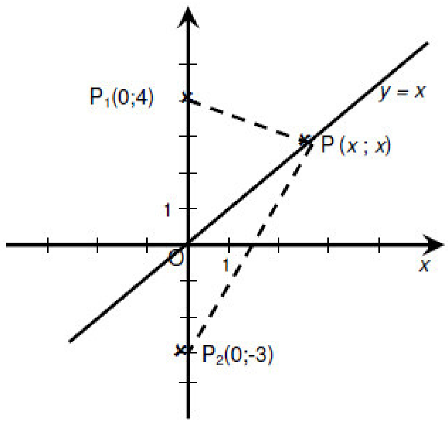
Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit és számadatait használva, a trapéz kerülete helyett elegendő megkeresni a DA + CB szakaszösszeg legkisebb értékét. Ebből a célból csúsztassuk el párhuzamosan a trapéz DA szárát a CC' helyzetbe. Ekkor tehát a BCC' töröttvonal minimumát kell megállapítani. vegyük észre, hogy ezúttal is alkalmazható a tükrözési elv, miszerint a BC+CC' összeg akkor lesz minimális, ha CB= CC'. Ekkor kiszámolva Pitagorasz tétellel a trapéz szárát azt kapjuk, hogy BC=AD= 13 cm. Így hát a trapéz legkisebb trapézkerület 56 cm×cm.

9. példa: Határozzuk meg az $f: R \to R,\ f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 41} + \sqrt{x^2 - 2x + 37}$ függvény minimum helyét!

Megoldás:A függvény így is felírható: $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 6^2}$. Tekintsük a következő pontokat: M(x,0); A(4,-5); B(1,-6). Vegyük észre, hogy $f(x) = MA + MB$, ahol M(x,0) az Ox tengely egy változó pontja. Tehát ennek az összegnek a minimumát kell meghatározni. A tükrözési elv szerint ez az összeg akkor minimális, ha MA=MB, vagyis $\sqrt{x^2 - 8x + 41} = \sqrt{x^2 - 2x + 37}$ ahonnan $x = \dfrac{2}{3}$ adódik, ami éppen a keresett minimumhely.

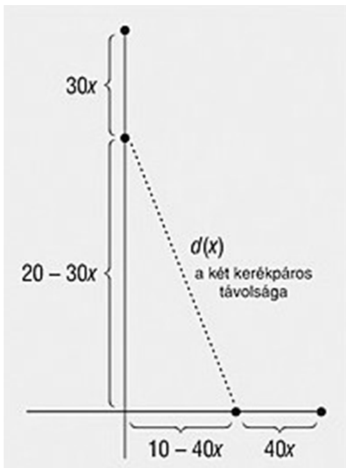
10. példa: Mennyi az $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} + \sqrt{2x^2 + 6x + 9}$ függvény minimua, ha $x \in R$.

Megoldás: Az adott függvény még így is felírható:



$f(x) = \sqrt{x^2 + (x-4)^2} + \sqrt{x^2 + (x+3)^2}$. Ez nem más, mint az $y = x$ egyenletű egyenesen elhelyezkedő $P(x, x)$ pontnak a távolságainak az összege a $P_1(0,4)$ és $P_2(0,-3)$ pontoktól vagyis $f(x) = |PP_1| + |PP_2|$. Minimizálni ezt az értéket azt jelenti, hogy megkeresni az y=x egyenesen a P pontnak azon helyzetét, amelyre a $|PP_1| + |PP_2|$ összeg a lehető leg kisebb. Belátható, hogy ez akkor a leg kisebb, ha P éppen egybeesik az O origóval, tehát $f(x) \geq f(0) = 4 + 3 = 7$

11. példa: Két, egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?

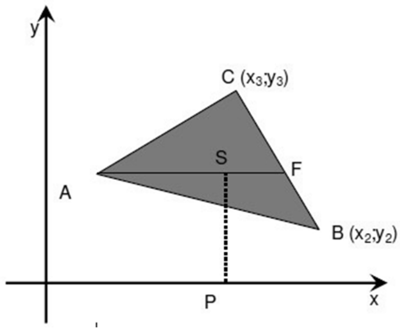


Megoldás: Legyen a keresett idő órában mérve x. Ekkor az egyik úton haladó kerékpáros 30x km–t tett meg, míg a másik kerékpáros által megtett út hossza $40x$ km lesz. A két kerékpáros aktuális távolságát Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatjuk: $d(x) = \sqrt{(20-3x)^2 + (10-40x)^2}$.

Legyen $d^2(x) = f(x) = 2500\left(x - \dfrac{2}{5}\right)^2 + 100$. A függvénynek $x = \dfrac{2}{5}$ nél lesz minimuma, az az a két kerékpáros $\dfrac{2}{5}$ óra = 24 perc múlva lesz a legközelebb egymáshoz.

Ez a minimális távolság $\sqrt{100} = 10$ km lesz. Ekkor a 40 km/h sebességgel haladó kerékpáros már áthaladt a kereszteződésen.

12. példa: Adott az ABC háromszög és síkjában az e egyenes. Keressük az e egyenes azon P pontját, amelyre $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális!



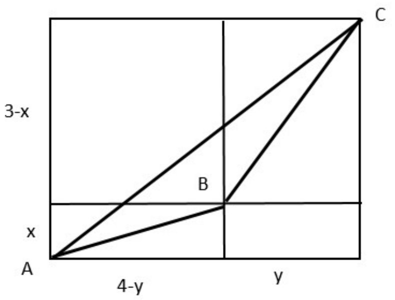
Megoldás: Helyezzük az ábrát koordináta rendszerbe! Speciálisan az e egyenes legyen az x tengely! A keresett P koordinátái: $P(x;0)$. Írjuk fel koordinátákkal a szóban forgó távolságok négyzetösszegét: $f(x) = PA^2 + PB^2 + PC^2 =$
$= (x - x_1)^2 + y_1^2 + (x - x_2)^2 + y_2^2 + (x - x_3)^2 + y_3^2 =$
$= 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Az f függvénynek minimuma van, és ezt a minimumot az $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ értékre veszi fel, melyből látható, hogy a keresett P pont nem más, mint az ABC háromszög S súlypontjának az e-re bocsátott merőleges vetülete.

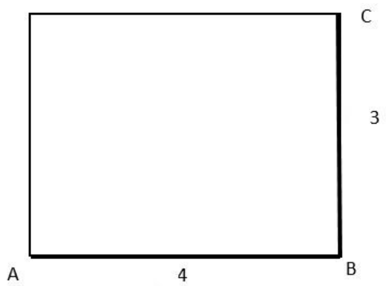
13. példa: Keressük meg az $E = \sqrt{x^2 + (4-y)^2} + \sqrt{y^2 + (3-x)^2}$ kifejezés szélsőértékeit, ha $x \in [0,3]$, $y \in [0,4]$!

Megoldás: Tekintsük a 3 és 4 oldalhosszú téglalapot. Annak oldalain vegyük fel az x és 3-x valamint y és 4-y távolságokat, amint a mellékelt ábra mutatja. Ekkor lássuk be, hogy

$$\sqrt{x^2 + (4-y)^2} + \sqrt{y^2 + (3-x)^2} = AB + BC \geq AC = \sqrt{(x+3-x)^2 + (y-4-y)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

hiszen az ABC töröttvonal mindig hosszabb vagy egyenlő az AC szakasszal.





Másfelől figyeljük meg, hogy az ABC töröttvonal akkor lesz a leghosszabb, ha a B csúcs lekerül a téglalap jobb alsó sarkába (lásd a második ábrát). Ezért $\sqrt{x^2 + (4-y)^2} + \sqrt{y^2 + (3-x)^2} \leq 4 + 3 = 7$.

14. példa: Ha A, B, C egy háromszög szögei, akkor mennyi a $\mathrm{E} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ szorzat maximuma?

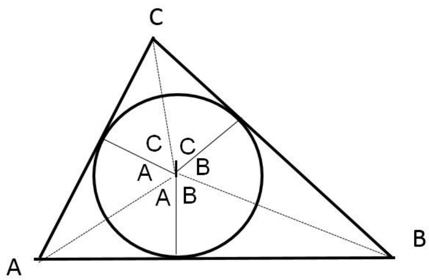
Megoldás: Összeggé alakítva az első szorzatot rendre felírható, hogy: $\mathrm{E} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} =$
$= \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{2}\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}$. Továbbá a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján $\left(1 - \sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2} \leq \left(\dfrac{1 - \sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, tehát $E \leq \dfrac{1}{8}$ és egyenlőség csak az $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

15. példa: Melyik hegyesszögű ABC háromszögre a legkisebb az $F = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ szorzat értéke?

Megoldás: A számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $\frac{tgA + tgB + tgC}{3} \geq \sqrt[3]{tgA \cdot tgB \cdot tgC}$, de $tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$, ezért azonnal kapjuk, hogy $tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$, egyenlőség $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

16. példa: Adott kör köré írható háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe?

Megoldás: Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhető, hogy az adott kör sugara egységnyi. Ekkor, a mellékelt ábra jelöléseivel felírható, hogy: $AB = tgA + tgB$, $BC = tgB + tgC$, $CA = tgC + tgA$. Ekkor az ABC háromszög területe egyenlő:



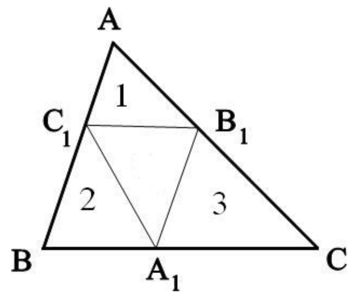
$$T = \frac{1}{2}\left(tgA + tgB + tgB + tgC + tgC + tgA\right) = tgA + tgB + tgC =$$

$= tgA \cdot tgB \cdot tgC$ és már láttuk, hogy $tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$.

Egyenlőség az $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben, vagyis egyenlő oldalú háromszögben áll fenn.

17. példa: A T területű általános ABC háromszögbe egy $A_1B_1C_1$ háromszöget írunk. Mennyi ennek a háromszög területnek a maximuma?

Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva igazoljuk, hogy ha $BA_1 = p \cdot A_1C$, $CB_1 = q \cdot B_1A$, $CC' = r \cdot C'A$, akkor igaz, hogy



$T(A_1B_1C_1) = \frac{1+pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)} T(ABC).$ Valóban, felírható, hogy

$T(A_1B_1C_1) = T - T_1 - T_2 - T_3$ (*) ahol T=T=ABC). Továbbá

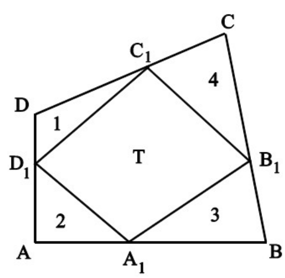
$$T_1 = \frac{AC_1 AB_1 \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}\frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}T$$

.Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $T_2 = \frac{p}{1+p}\frac{1}{1+r}T,\ T_3 = \frac{q}{1+q}\frac{1}{1+p}T$. Ezeket behelyettesítve az (1) összefüggésbe, a műveletek elvégzése után éppen a jelzett összefüggés adódik.

De $1+p \geq 2\sqrt{p},\ 1+q \geq 2\sqrt{q},\ 1+r \geq 2\sqrt{r}$, ezért $\frac{1+pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)} \leq \frac{1+pqr}{8\sqrt{pqr}} \leq \frac{1}{4}$, hiszen $\left(1-\sqrt{pqr}\right)^2 \geq 1$, így hát $T(A_1B_1C_1) \leq \frac{1}{4}T(ABC).$ Egyenlőség p= q= r= 1 esetben áll fenn, amikor az $A_1,\ B_1,\ C_1$ pontok éppen oldalfelező pontok.

18. példa: Az ABCD konvex négyszög AB, BC, CD, DA oldalain felvesszük rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokat úgy, hogy $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = k > 0$. Ha az ABCD négyszög területe állandó, és az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe T, határozzuk meg a T legkisebb értékét!

Megoldás: $T_1 = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(DAC),\ T_3 = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(BAC)$ így



$T_1 + T_3 = \frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$. Teljesen hasonlóan $T_2 + T_4 = \frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$

Továbbá $T = T(ABCD) - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = \frac{k^2+1}{k^2+2k+1}T(ABCD)$ és

$\frac{k^2+1}{k^2+2k+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (k-1)^2 \geq 0$. Egyenlőség k=1 esetben áll fenn, amikor is A_1, B_1, C_1, D_1 oldalfelező pontok, és $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma.

A következő részben különböző elemi függvények szélsőértékét fogjuk meghatározni elemi módszerekkel.