Szélsőérték problémák elemi megoldása
I. rész
Izoperimetrikus problémák

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a dolgozatban szélsőértékek számolásával foglalkozunk, de csupán csak elemi módszereket használunk. Ez azt jelenti, hogy teljesen mellőzzük a matematikai analízis eszközeit. Ez egyes feladatok esetén nem is használható, más esetben inkább az elemi módszerek szépségeire, sokszínűségére és változatosságára fektetjük a hangsúlyt.

A szélsőérték fogalma gyűjtő fogalom, a legnagyobb (maximum) és a legkisebb (minimum) értékek közös megnevezésére használják. Ezek értelmezése a következő:

1. **Értelmezés**: Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $M = f(a)$ globális maximuma (egyszerűen maximuma), ha $f(x) \le M$ minden $x \in D$ esetén.
2. **Értelmezés**: Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $m = f(\mathrm{b})$ globális minimuma (egyszerűen minimuma), ha $f(x) \ge m$ minden $x \in D$ esetén.

Amennyiben az egyenlőtlenségek a D halmaznak csak egy részhalmazán teljesülnek, a szélsőértékek csak lokáli vagy helyi szélsőértékek. Egy függvénynek lehet több lokális minimuma vagy maximuma is, és a lokális maximum kisebb is lehet mint a lokális minimum. A lokális maximum közül a legnagyobb a függvény globális maximuma, a lokális minimumok közül a legkisebb a függvény globális minimuma.

A szélsőérték problémák közül egyik legrégibb problémák az úgynevezett izoperimetrikus problémák. Az „izoperimetrikus" szó az izo = állandó, periméter = kerület szóösszetételből ered. A probléma a következő:

A síkbeli izoperimetrikus tétel:

a) Az adott kerületű síkalakzatok közül a kör a legnagyobb területű.
b) Az adott területű síkalakzatok közül a kör a legkisebb kerületű.

Euklidész aki i.e. 300 körül élt, már ismerte a téglalapok izoperimetrikus problémájának a megoldását, amely valószínűleg már előtte is ismert volt. Arkhimédesz (i.e. 287-212), ismerte az izoperimetrikus tétel állítását. Időszámításunk kezdete táján a geometriai szélsőértékek tanulmányozása már meglehetősen fejlett volt. Tudomásunk van arról, hogy Zenodórosz, aki kb. i.e. 200 és i.sz. 90 között élt, írt egy „Izoperimetrikus alakzatok" című könyvet, ennek sajnos egyetlen példánya sem maradt hátra, de az ő eredményeit újra ismertette és bebizonyította az alexandriai *Papposz* i.sz. 300 körül.

A monda szerint az izoperimetrikus probléma eredete a következő: *Dido*, *Tyrosz* királyának lánya volt. Nagybátyjához, *Acerbászhoz* ment feleségül, akit azonban mesés vagyona miatt hamarosan meggyilkoltak. Dido ekkor *Acerbász* kincseivel együtt Ciprusra menekült, majd innen tovább hajózott Afrika Szicíliához közeli partjaira. Elment a vidék uralkodójához és elmondta neki, hogy szeretne a tengerpart mentén egy földdarabot vásárolni, de nem nagyobbat, mint amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a szépséges királynő kérésébe, sőt nagylelkűen még meg is ajándékozta egy jókora marhabőrrel. Az okos *Dido* keskeny csíkokra vágta azt szét és a szeleteket összecsomózva olyan hosszú kötélhez jutott, amelyikkel jóval nagyobb (tengerbenyúló) földterületet lehetett elkeríteni a tengerparton, mint amekkorát az uralkodó elképzelt. Így alapította meg Karthágó virágzó városát, aminek később ő lett a királynője.

A középkorban számos neves matematikus foglalkozott ezzel a témakörrel. Néhány híres nevet említve: *Descartes* (1596-1650), *Jacob Bernoulli* (1645-1705*), Johann Bernoulli* (1667-1748), *Euler* (1707-1783), *Lagrange* (1736-1813), és mások Kétségtelenül *Jacob Steiner* (1796-1863) svájci matematikus volt az, akinek a munkássága a korábbi eredmények betetőzését jelentette, szintetizálta a korábbi eredményeket, új ötletekkel gazdagította e problémakört, de mindegyikük (akárcsak *Zenodórosz* is), nyilvánvalónak tartotta és nem bizonyította azt, hogy létezik megoldása ennek a problémának. (v.ö. [3], 9. oldal). Dirichlet (1805-1859) vette észre először az izoperimetrikus tétel eddigi bizonyításának a hiányosságát, és csak 1870-ben, Weierstrass (1815-1892) küszöbölte ki ezt, ugyanis szigorúan bebizonyította a kör nevezetes szélsőérték tulajdonságát. Ezek után számos más matematikus foglalkozott a probléma különböző bizonyításával (v. ö. [3], 26. oldal), de mindmáig egyetlen igazán elemi bizonyítás sem született.

A síkbeli izoperimetrikus tétel bizonyításának a menete a következő:

1) A Weierstrass–tétel segítségével belátjuk, hogy az adott k kerületű n oldalú sokszögek között létezik maximális területű, ha n rögzített.
2) Belátjuk, hogy az azonos hosszúságú, n oldalú, zárt sokszögvonalak közül a szabályos sokszög területe a legnagyobb.
3) Belátjuk, hogy az adott k kerületű, szabályos sokszögek területének van szuprémuma, midőn befutja N-et, a k kerületű kör területe.

Mivel erre nincs elemi bizonyítás, a dolgozatunkban ezt nem is mutatjuk be, ellenben megjegyezzük, hogy a bizonyításnak számos láncszeme elemi, és ezeket részben fellelhetjük a következő feladatok bizonyításában.

1) A háromszög izoperimetrikus tételei:

a) Adott kerületű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legnagyobb a területe.
b) Adott területű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c az ABC háromszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, és T a területe. Ekkor Heron képlete szerint $T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

De a számtani és mértani közepeknek az $\dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2=p(p-a)(p-b)(\mathrm{p-c})\leq \mathrm{p}\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27} \text{ vagyis } 3\sqrt{3}\cdot T\leq p^2 \quad (*)$$

Mivel a (*) egyenlőtlenségben az egyenlőség a=b=c esetben áll fenn, ezért a két tétel állítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha p állandó, akkor $T_{\max}=p^2\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min}=\sqrt{3\sqrt{3}\cdot T}$.

2) A négyszög izoperimetrikus tételei:

a) Adott kerületű négyszögek közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.
b) Adott területű négyszögek közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c, d az ABCD négyszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ a négyszög félkerülete, és T a területe. A négyszögek esetében is fennáll a Heron képlethez hasonló összefüggés: $T=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(\mathrm{p-d})-abcd\cdot\cos^2\dfrac{B+D}{2}}$.

De a számtani és mértani közepeknek az $\dfrac{x+y+z+t}{4}\geq\sqrt[4]{xyzt}$ egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2\leq(p-a)(p-b)(\mathrm{p-c})(\mathrm{p-d})\leq\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(\mathrm{p-d})}{4}\right)^4=\left(\frac{3p}{4}\right)^4 \quad (**)$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha először is $\cos^2\dfrac{B+D}{2}=0\Leftrightarrow B+D=180°$ vagyis a négyszög körbeírható, továbbá még a= b= c= d is kell teljesüljön. Ezért a (**) egyenlőtlenség alapján a két állítás bizonyítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha p állandó, akkor $T_{\max} = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$, a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min} = \frac{4\sqrt{T}}{3}$.

Tanulságos külön megvizsgálni a következő sajátos esetet:

3) A téglalap izoperimetrikus tételei:

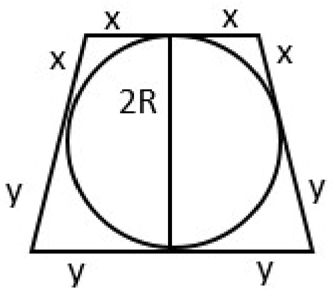
a) Adott kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.

b) Adott területű téglalapok közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelöljük, x, y-nak a téglalap méreteit, T-vel a területét, K-val a kerületét. Tehát T=xy és K=2(x+y). Az $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ középarányos egyenlőtlenség alapján azonnal adódik, hogy $T \leq \left(\frac{K}{4}\right)^2$. És mivel az egyenlőség csak x=y esetben áll fenn, ezzel beláttuk az állításainkat.

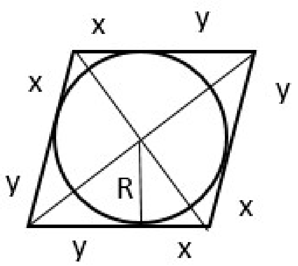
4) Keressük meg egy adott R sugarú kör köré írt egyenlő szárú trapéz kerületének a minimumát!

Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Meghúzva a trapéz két magasságát, Pitagorasz tétele alapján $(2R)^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2$ ahonnan $xy = R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a p=4(x+y) trapézkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8} \geq \sqrt{R^2} \Leftrightarrow p \geq 8R$ és egyenlőség az $x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a trapéz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.



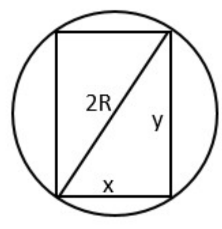
5) Mekkora a minimális kerületű rombusz oldala, ha a beírható kör sugara R?

Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért a magasságtétel értelmében $R = \sqrt{xy} \Leftrightarrow xy = R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a p=4(x+y) rombuszkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8} \geq \sqrt{R^2} \Leftrightarrow p \geq 8R$ és egyenlőség az $x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a rombusz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.

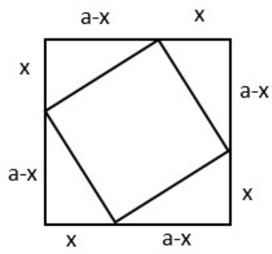


6) Határozzuk meg az R sugarú körbe írt téglalapok közül azt, amelyiknek a legnagyobb a területe!

Megoldás: A téglalap oldalait jelöljük x illetve y-nal. Felírható, hogy $x^2 + y^2 = 4R^2$. Továbbá ha T a téglalap területe, akkor $T = xy$. Képezzük a következő függvényt: $f(x, y) = x^2 y^2 = x^2(4R - x^2) = -x^4 + 4R^2 x^2$. Ekkor az $x^2 = t$ jelöléssel, az $f(t) = -t^2 + 4R^2 t$ függvény minimumát kell meghatározni, amit a $t = -\frac{b}{2a} = 4R^2$ esetben vesz fel, ahonnan $x = R\sqrt{2}$ és így $y = R\sqrt{2}$ ami azt jelenti, hogy a téglalap akkor veszi fel a legnagyobb területet, amikor éppen négyzet.

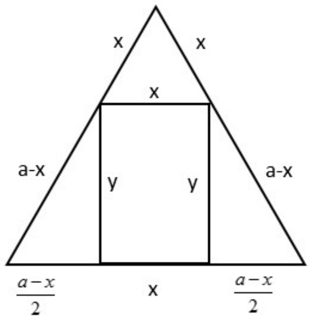


7) Határozzuk meg, hogy adott négyzetbe írt négyzetek közül melyiknek minimális a területe!



Megoldás: Legyen az eredeti négyzet oldala a. A mellékelt ábra jelöléseit használva felírhatjuk, hogy a beírt négyzet oldalhossza egyenlő $\sqrt{x^2+(a-x)^2}=\sqrt{2x^2-2ax+a^2}$, ezért a beírt négyzet területe $T=2x^2-2ax+a^2$ aminek minimuma van, és ezt a minimumot $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, vagyis akkor, amikor a beírt négyzet csúcsai éppen oldalfelező pontok.

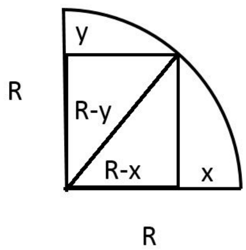
8) Határozzuk meg az adott szabályos háromszögbe írt téglalapok közül azt, amelynek a legnagyobb a területe!



Megoldás: A szabályos háromszög oldalhossza legyen *a*, továbbá a téglalap méretei pedig *x* és *y*. A mellékelt ábra jelöléseit használva számítsuk ki a téglalap *y* méretű oldalhosszát:

$y=\sqrt{(a-x)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=(a-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát a téglalap területe $T=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a\sqrt{3}}{2}x$. Ennek a másodfokú kifejezésnek maximuma van, és ezt $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, amikor is $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ vagyis a téglalap vízszintes oldal a középvonal, a függőleges oldala a szabályos háromszög magasságának a felével egyenlő.

9) Az R sugarú negyedkörbe téglalapot írunk úgy, hogy egyik csúcs a negyedkör középpontjában, másik csúcsa a negyedkörön legyen. Mikor a legnagyobb ennek a területe?



Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva felírjuk a téglalap területét: $T=(R-x)(R-y)$ és ugyanakkor $(\mathrm{R}-\mathrm{x})^2+(\mathrm{R}-\mathrm{y})^2=\mathrm{R}^2$

Az $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ egyenlőtlenség alapján $a=R-x,\ b=R-y$ választással $\frac{R^2}{2}\geq T$ adódik, egyenlőség a= b vagyis x= y esetben áll fenn amikor is $R-x=R-y=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ vagyis a téglalap tulajdonképpen négyzet.

10) Adva van egy háromszög a alapja és k kerülete. Mikor maximális a terület?

1. **Megoldás**: A Héron képlete szerint, ha $p=\frac{k}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, akkor

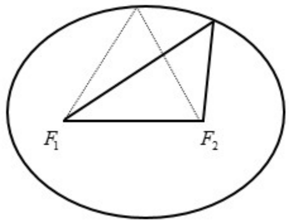
$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Ebből állandó az a és a $p-a$ ezért írjuk a területet így:

$T=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}$. Most alkalmazzuk a $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenséget az $x=p-b$

és $y = p - c$ választással. Ekkor $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{p-b+p-c}{2} = \frac{a}{2} = \acute{a}lland\acute{o}$. Tehát

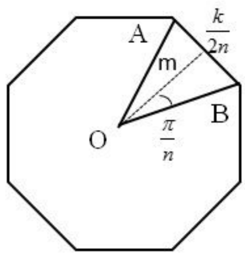
$T \le \sqrt{p(p-a)}\,\frac{a}{2} = \acute{a}lland\acute{o}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha x=y, vagyis b= c, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

2. Megoldás: Rajzoljunk olyan ellipszist, amelynek a fókuszpontjai az adott alappal egyenlő távolságra vannak egymástól, továbbá a nagytengelye a háromszög kerületének és alapjának a különbsége. Ezen az ellipszisen helyezkedik el a háromszög harmadik csúcsa, és a legnagyobb magasság nyílván valóan az ellipszis tető- illetve mélypontjához tartozik, tehát a legnagyobb területű az a háromszög, amely egyenlő szárú.



11) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő kerületű szabályos sokszögek közül annak nagyobb a területe, amelyiknek több oldala van!

Megoldás: Legyen O a szabályos sokszög középpontja, k a kerülete, és rajzoljuk meg az egyik oldalához tartozó OAB egyenlő szárú háromszöget, amelynek a magassága legyen m, a középpontnál levő csúcsszög fele pedig $\frac{\pi}{n}$. Így a szabályos sokszög területe



$T_n = n \cdot \frac{k}{2n} \cdot m = \frac{k}{2}\frac{\frac{k}{2n}}{tg\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$. Legyen most a két egyenlő kerületű, de különböző n_1 illetve n_2 oldalszámú szabályos sokszög. Ezek területe akkor

$T_1 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_1}}{tg\frac{\pi}{n_1}}$ illetve $T_2 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_2}}{tg\frac{\pi}{n_2}}$. Azt kell megmutatnunk, hogy ha például $n_1 > n_2$, akkor

$T_1 > T_2$. Mindenek előtt szögezzük le, hogy $n_2 \ge 3$, tehát $\alpha_2 = \frac{\pi}{n_2} \le \frac{\pi}{3}$ és $0 < \alpha_1 = \frac{\pi}{n_1} \le \alpha_2$.

Nyílván elegendő bizonyítani, hogy $\frac{\alpha_1}{tg\alpha_1} > \frac{\alpha_2}{tg\alpha_2} \Leftrightarrow \frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$. Az utóbbi egyenlőtlenség helyes voltát beláthatjuk, ha megrajzoljuk a tgx függvény grafikus képét a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon, ahol a függvény görbe alulról domború (konvex), így az O-t a $(\alpha_1, tg\alpha_1)$ ponttal összekötő húr alatta lesz az O-t a $(\alpha_2, tg\alpha_2)$ ponttal összekötő húrnak, vagyis az első húr egyenesének az iránytangense kisebb mint a második egyenes iránytangense, vagyis $\frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$.Ezzel igazoltuk az állításunkat.

Eredményül az is következik, hogy az adott kerületű, különböző oldalszámú szabályos sokszögek között nincsen maximális területű.

Ezzel befejezzük az izoperimetrikus típusú szélsőértékek vizsgálatát és megjegyezzük, hogy a dolgozatunk következő részében geometriai jellegű problémák szélsőértékeivel foglalkozunk.