Szélsőérték problémák elemi megoldása
III. rész
Függvények szélsőértéke

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben egy, vagy többváltozós elemi függvény szélsőértékeit határozzuk meg, elemi módszerekkel. A továbbiakban a módszerek változatosságára szeretnénk figyelmet fordítani.

1. **<u>példa</u>**: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény minimumát, ha $x\in R$.

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\dfrac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$ mert $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ minden

$a>0$ esetén, és egyenlőség $\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=0$ esetben áll fenn.

2. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f:R_+\to R$, $f(x)=\dfrac{4}{x^2}+x$ függvény legkisebb értékét!

Megoldás: Mivel $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ minden $a>0,\ b>0,\ c>0$ esetén, és egyenlőség csak az

$a=b=c$ esetben áll fenn, ezért az $a=\dfrac{4}{x^2},\ b=c=\dfrac{x}{2}$ választással $f(x)\geq 1$ adódik, és egyenlőség

a $\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$ esetben áll fenn.

3. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{3x^2+18x+23}{x^2+6x+10}$ függvény maximumát, ha $x\in R$.

Megoldás: felírható, hogy $f(x)=\dfrac{3(x^2+6x+10)-7}{x^2+6x+10}=3-\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ és ez akkor minimális, ha

$\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ maximális, és ez akkor igaz, ha $x^2+6x+10$ minimális, de ez akkor igaz, ha

$x=-\dfrac{b}{2a}=-3$, így hát $f(x)\geq f(-3)=-4$.

4. **<u>példa</u>:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+2x^2+2x+2}{x^2+x+1}$ függvény minimumát, ha $x\in R$!

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\dfrac{(x^2+x+1)^2+x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2+x+1}\geq 2$, és egyenlőség csak az $x^2+x+1=1$, vagyis $x\in\{0,-1\}$ esetben áll fenn.

5. **példa:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény szélsőértékeit, ha $x\in R$.

Megoldás: Legyen $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=y$, ahonnan $(y-1)x^2-x+y-1=0$ valós x esetén teljesül, ezért

$\Delta \geq 0$, ami alapján $4y^2-8y+3\leq 0$ vagyis $y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

6. **példa:** Határozzuk meg az $f:[0,5]\to R$, $f(x)=\frac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\frac{2(x^2-5x-6)+x+1}{x^2-5x-6}=2+\frac{x+1}{(x-6)(x+1)}=2+\frac{1}{x-6}$. És mivel az

$x\to\frac{1}{x-6}$ függvény szigorúan csökkenő, ezért $1=f(5)\leq f(x)\leq f(0)=\frac{11}{6}$.

7. **példa:** Határozzuk meg az $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vizsgáljuk meg a függvény monotonitását. Legyen $\alpha>\beta>0$. Ekkor felírható, hogy

$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}>0$ ami azt jelenti, hogy az f

függvény szigorúan csökkenő, ezért $\frac{2}{3}=f(1)\leq f(x)\leq \mathrm{f}(0)=1$

8. **példa**: Határozzuk meg az $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)$ és az $a+\frac{1}{a}\geq 2$ minden $a>0$ esetén

alapján, ha *x> 1*, akkor $f(x)\geq 1$. Ellenben, ha x< 1, akkor mivel $f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}-1$ és $\frac{x^2}{2(x-1)}$

szigorúan csökkenő, ezért $\frac{x^2}{2(x-1)}-1\leq -1$ és egyenlőség csak x= 0 esetben áll fenn. Vegyük észre, hogy az m= 1 a függvénynek csak lokális minimuma, úgyszintén az M= -1 is csak lokális maximuma.

9. **példa**: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x\in R$!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért az

$a=\sqrt{x-3}$ és $b=\sqrt{7-x}$ választással felírható, hogy: $\sqrt{\frac{x-3+7-x}{2}}\geq\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2}$, vagyis

$\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}\leq 2\sqrt{2}$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $x-3=7-x$, vagyis $x=5$.

Másfelől $f^2(x)=4+2\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{7-x}\geq 4$, és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=3$ vagy $x=7$.

10. **példa**: Határozzuk meg az $f(x)=5\sin x+12\cos x$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x\in R$!

Megoldás: Ismert a Cauchy-Buniakovsky-Schwarz féle egyenlőtlenség sajátos esete, miszerint: $\left(aA+bB\right)^2\le(a^2+b^2)(A^2+B^2)$. Ha most $a=\mathrm{sinx},\ b=\cos x,\ A=5,\ B=12,$ akkor

$f^2(x)\le\left(5^2+12^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=13^2$, ahonnan $\left|f(x)\right|\le 13$, ezért $-13\le f(x)\le 13$.

11. **példa:** Adjuk meg az $f(x)=\sin^8 x+\cos^8 x$ függvény szélsőértékeit, ha $x\in R$!

Megoldás: Végezzük el az alábbi átalakításokat: $f(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$.

Ellenben $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$, így felírható, hogy

$f(x)=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=\frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1$. Vezessük most be a

$\sin^2 2x=a$ változócserét. Így a $g(a)=\frac{1}{8}a^2-a+1=\frac{1}{8}(a-4)^2-1$ függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk, ahol $0\le a\le 1$. De mivel az *a* változó nem veheti föl az 4 értéket, ezért a g függvény esetén nem írható fel, hogy $\frac{1}{8}(a-4)^2-1\ge -1$ hanem arra következtethetünk, hogy a g függvény parabolájának a csúcsa a $V(4,-1)$ pontban van, és mivel $a\le 1$, ezért $a<4$, vagyis a parabolának csak a baloldali leszálló ágáról van szó, ahol a g függvény monoton csökkenő a $\left[0,1\right]$ intervallumon, ezért $\frac{1}{8}=g(1)\le g(a)\le g(0)=1$ és ezek adják egyben az f függvény szélsőértékeit is.

12. **példa:** Határozzuk meg az $f:\left[0,1\right]\to R$, $f(x)=2^x3^{1-x}+3^x2^{1-x}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért

$\frac{f(x)}{2}=\frac{2^x3^{1-x}+3^x2^{1-x}}{2}\ge\sqrt{2^x3^{1-x}3^x2^{1-x}}=\sqrt{6}$ vagyis $f(x)\ge 2\sqrt{6}$. Egyenlőség

$2^x3^{1-x}=3^x2^{1-x}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ esetben áll fenn. Másfelől becsüljük meg az f(x)-5 különbséget! felírható, hogy:

$$f(x)-5=3\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\left(\frac{3}{2}\right)^x-3-2=\frac{(3\cdot 2^{2x}-3\cdot 3^x2)+(2\cdot 3^x-2\cdot 2^x3^x)}{6^x}=\frac{3\cdot 2^x(2^x-3^x)-2\cdot 3^x(2^x-3^x)}{6^x}=$$

$=(2^x-3^x)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{2}{3}\right)3^{x+1}\le 0$ ha $x\in\left[0,1\right]$, ezért $f(x)\le 5$. Egyenlőség x=0 vagy x=1 esetben áll fenn.

13. **példa**: Határozzuk mg az $f(x)=ax^m+\dfrac{b}{x^n}$ függvény minimumát, ha $a,\ b,\ x,\ m,\ n>0$ és m, n természetes számok!

Megoldás: Írjuk fel a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenséget m+n tag esetén, a következő választással:

$$\frac{\left(\frac{ax^m}{n}+\frac{ax^m}{n}+...+\frac{ax^m}{n}\right)+\left(\frac{b}{mx^n}+\frac{b}{mx^n}+...\frac{b}{mx^n}\right)}{n+m}\geq \sqrt[m+n]{\frac{a^n}{n^n}(x^m)^n\frac{b^m}{m^m}\frac{1}{(x^n)^m}}=\left[\left(\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$$

Tehát $f(x)\geq(m+n)\left[\left(\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$, vagyis ez utóbbi kifejezés az f függvény minimuma, és ezt az $\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}\Leftrightarrow x^{m+n}=\frac{nb}{ma}\Leftrightarrow x=\left(\frac{nb}{ma}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ esetben veszi föl.

14. **példa**: Határozzuk meg az $f:R\to R,\ f(x)=x^5-5x^4+11$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy az $f(x)=x^5-5x^4+11$ függvénynek akkor vannak szélsőértékei, mint amikor a $g(x)=x^5-5x^4=x^4(x-5)$. Ennek a szélsőértékeit könnyen meghatározhatjuk, ha meghatározzuk a $h(x)=-g(x)=x^4(5-x)$ függvény szélsőértékeit. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek egyenlőtlenségét a következő választással: $1=\dfrac{\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+(5-x)}{5}\geq\sqrt[5]{\frac{x^4(5-x)}{4^4}}$,

vagyis $h(x)\leq 4^4=256$. Egyenlőség $\frac{x}{4}=5-x\Leftrightarrow x=4$ esetben áll fenn, ekkor h-nak helyi maximuma, így f-nek minimuma van, és minf(x)= f(4)= -245. Másfelől, ha $x\leq 0$ akkor a h függvénynek helyi minimuma van, hiszen $x^4(5-x)\geq 0$ és egyenlőség x=0 esetben áll fenn, ez lesz az f maximum helye, amelyre maxf(x)=f(0)=11.

15. **példa:** Mennyi az $a\cdot b$ minimuma, ha $a>0,\ b>0$ és $5a+7b=1$?

Megoldás: Mivel minden $x>0,\ \mathrm{y}>0$ esetén $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x=y$ esetben igaz, ezért $\dfrac{1}{2}=\dfrac{5a+7b}{2}\geq\sqrt{35ab}$, ahonnan $ab\leq\dfrac{1}{140}$, egyenlőség $5a=7b$ esetben igaz, az $5a+7b=1$ alapján $a=\dfrac{1}{10}$ és $b=\dfrac{1}{14}$ esetben áll fenn.

16. **példa:** Ha $x^2+y^2=1$, akkor határozzuk meg az $E=2x+3y$ kifejezés szélsőértékeit!

Megoldás: Legyen $2x+3y=p$ és az $x^2+y^2=1$ összefüggés alapján, mivel $x=\dfrac{p-3y}{2}$, ezért $13y^2-6py+p^2-4=0$ megoldható a valós számok halmazán, ezért $\Delta\geq 0$, ahonnan $p^2\leq 13\Leftrightarrow -13\leq p\leq 13$.

17. **példa**: A Descartes-féle síkbeli derékszög_ koordinátarendszer mely pontjaira teljesül, hogy $x^2 + y^2 = 1$ és $|x+y|$ maximális?

Megoldás: Ismert az abszolút érték háromszög egyenlőtlensége, miszerint $|x+y| \le |x| + |y|$ és egyenlőség akkor áll fenn, ha a két szám egyforma előjelű. Továbbá a számtani és négyzetes középarányosok egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$$\frac{|x+y|}{2} \le \frac{|x|+|y|}{2} \le \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Egyenlőség azokra a számpárokra áll fenn, amelyekre az $|x| = |y|$ és x, y azonos előjelű, és $x^2 + y^2 = 1$. Ezért a feltételnek eleget tevő számpárok $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ezekre az értékekre lesz a $|x+y|$ maximális.

18. **példa**: Mennyi az $E = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$ kifejezés minimuma, ha $x > 1,\ y > 1$?

Megoldás: Végezzük el az *a=x-1* és *b=y-1* változócserét. Ekkor, az $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \ge \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenség alapján $\frac{E}{2} = \frac{\frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}}{2} \ge \sqrt{\left(a + \frac{1}{a} + 2\right)\left(b + \frac{1}{b} + 2\right)} \ge \sqrt{4 \cdot 4} = 4$, ugyanis $a + \frac{1}{a} \ge 2$ és $b + \frac{1}{b} \ge 2$, így $E \ge 8$, Egyenlőség $a = b = 1$ vagyis $x = y = 2$ esetben áll fenn.

19. **példa**: Határozzuk meg az $E = \frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs}$ kifejezés minimumát, ha $p, q, r, s > 0$.

Megoldás: Mivel $a + \frac{1}{a} \ge 2$ minden $a > 0$ esetén, ezért $\frac{x^2+x+1}{x} = 1 + x + \frac{1}{x} \ge 3$, így hát $E \ge 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, egyenlőség $p = q = r = s = 1$ esetben áll fenn.

20. **példa**: Mennyi az $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ minimuma, ha $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$?

Megoldás: Mivel minden $x > 0,\ y > 0$ esetén $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x = y$ esetben igaz, ezért felírható, hogy: $\frac{a+b}{2}\frac{b+c}{2}\frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca} = abc$, ezért $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \ge 8$ és egyenlőség az $a = b = c$ áll fenn.

21. **példa**: Ha $a, b, c \ge -\frac{1}{2}$ és $a + b + c = 1$, akkor mennyi az $E = \sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1}$ kifejezés maximuma illetve minimuma?

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$ és egyenlőség az $x=y=z$ esetben áll fenn, ezért az

$x=\sqrt{2a+1}$, y=$\sqrt{2b+1}$, z=$\sqrt{2c+1}$ esetben felírható, hogy $\sqrt{\frac{5}{3}} \geq \frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}}{3}$,

ahonnan $E \leq \sqrt{15}$, egyenlőség $a=b=c=\frac{1}{3}$ esetben áll fenn. Másfelől felírható, hogy $E^2 \geq 5+2\left(\sqrt{2a+1}\sqrt{2b+1}+\sqrt{2b+1}\sqrt{2c+1}+\sqrt{2c+1}\sqrt{2a+1}\right) \geq 5$ vagyis $E \geq \sqrt{5}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a három szám közül kettő $-\frac{1}{2}$ -el egyenlő, a harmadik pedig az $a+b+c=1$ alapján *2*-vel egyenlő.

22. **példa**: Az x, y, z valós számokra teljesülnek az $x+y+z=4$ és az $xy+yz+zx=4$ egyenlőségek. Milyen korlátok között változhatnak az x, y, z számok?

Megoldás: Az egyenletrendszer így is felírható: $x+y=4-z$ és $xy=4-z(x+y)$ vagyis $x+y=4-z$ és $xy=4-4z+4z^2$. Képezzük azt a másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei x, y :

$t^2-(4-z)t+4-4z+z^2=0$. Mivel az egyenletnek valós gyökei kell legyenek, ezért

$\Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow z \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$. És mivel az eredeti egyenlet rendszer szimmetrikus az $x, y, z-ben$, ezért igaz az is, hogy $x \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$és $y \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

23. **példa**: Határozzuk meg az $f(x, y, z)=\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$ függvény minimumát, ha x>0, y>0 és z>0 valós számok!

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget 6 tag esetén, a következő választással:

$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6} \geq \sqrt[6]{x\frac{y^2}{4}\frac{z^3}{27}}$ ahonnan $f(x, y, z)=\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq 2^4 3^3$. Egyenlőség az

$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ esetben áll fenn.

Szakirodalom

[1] Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, 1980
[2] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Dacia Könyvkiadó, Cluj-Napoca, 1988
[3] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család, Graphisoft Kft, 1993
[4] Vigné Dr. Lencsés Ágnes: A problémamegoldó képesség fejlesztése szélsőérték feladatok megoldásával, 2007 (tanulmány)
[5] Kapitány Benedek: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)
[6] Kapitány Benedek: Az izoperimetrikus egyenlőtlenség, ELTE, 2013 (szakdolgozat)
[7] Ábrahám Gábor: Szélsőérték feladatok elemi megoldása 2013 (http://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20130112_cikkek_abrahamgabor_szelsoertekelemi.pdf)
[8] Berzsenyi Viktória: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2010 (szakdolgozat)
[9] Lengyel Csilla Mária: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)
[10] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex, Budapest, 1994