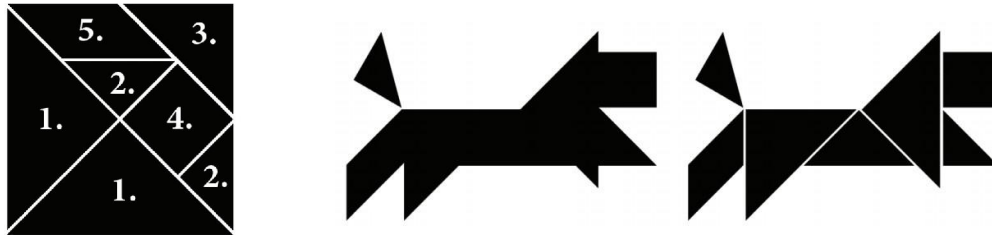


Tangramcsodák

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

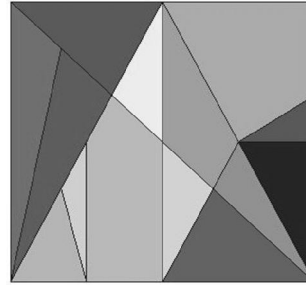
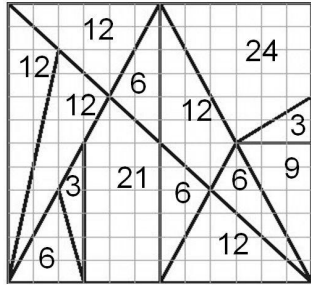
A tangramok ősi kirakójátékok. A játék célja az, hogy a „tangramkövek” maradéktalan felhasználásával kirakjunk különböző alakzatokat, illetve megfejteni, hogy egy megadott alakzatban hogyan helyezkednek el a kövek. A mellékelt tangram-ábra köveivel például a „kutyaábrát” kell kirakni, és azt is látjuk, hogyan kell a kövekkel konkrétan kirakni is ezt.



A kövekből elméletileg bármilyen sok alakzat kirakható, de természetesen azok az „érdekesek” amelyek valamit szemléltetnek is. Ízelítőül álljon itt a következő néhány alakzat:

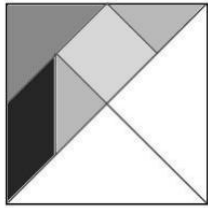


A legrégebbi tangram kétségtelenül az Archimedes tangramja vagy más néven a „Stomachion”. Ez több mint 2000 éves, hiszen i.e. 287- 212 körüli források rávilágítanak arra, hogy Archimedes kéziratában megtalálható. A 14 kőből álló tangram megszerkesztése végett induljunk ki egy 12×12-es rácsnégyzetből, és a kövek csúcsai legyenek egyes négyzetrács csúcsán, ahogyan a következő ábra mutatja.

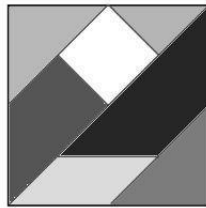


Könnyen ellenőrizhető, hogy a tangramnak mind a 14 alakzata egész egységnyi területű alakzatok, az ábrán fel is tüntettük az egyes alakzatok területét.

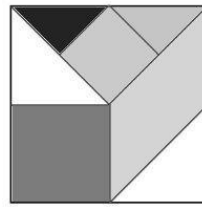
Az idők folyamán számos alakzat alapján, különböző darabszámból készítették tangramokat, ezek közül bemutatunk néhány készletet:



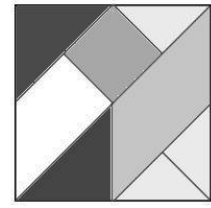
Kínai tangram



Japán tangram



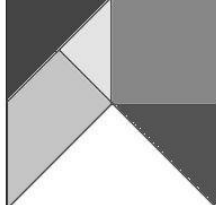
Pitagoras tangram



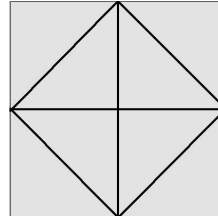
Tormentor



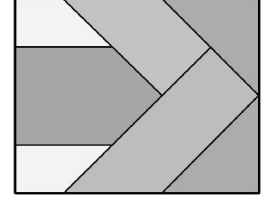
Pentagram



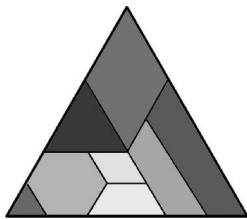
Sixagram



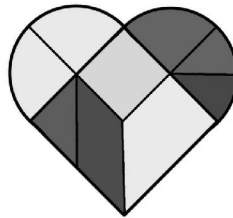
Oktagram



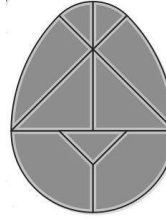
Diaphan



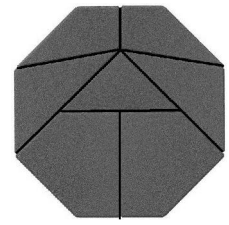
Háromszög tangram



Szív tangram



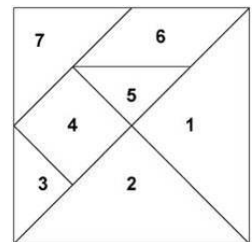
Tojás tangram



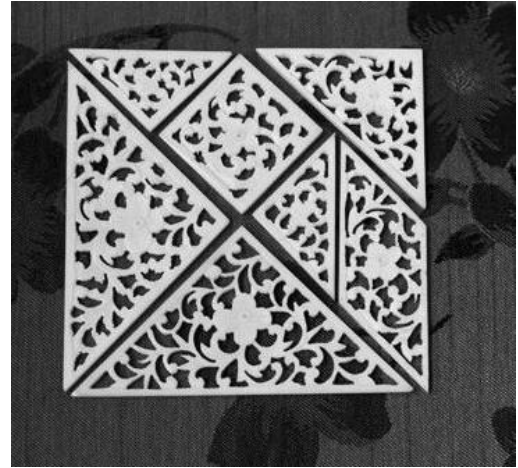
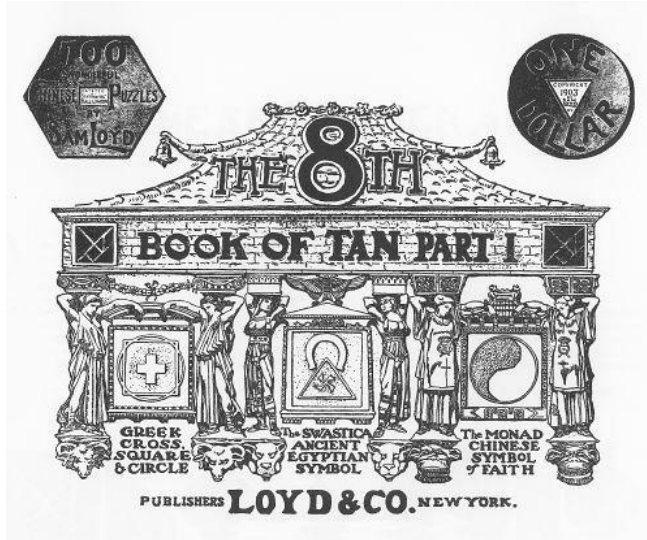
Nyolcszög tangram

A bemutatott példák csak ízelítők a tangramok sokféleségének a világából, ám ezek egyben az ismertebbek is. Látható, hogy a tangramkészletek előállításánál nagyon gyakran négyzetlapot osztanak fel különféle alakzatokra, főként olyanokra, amelyeknek a szögeik 45° illetve ennek többszörösei. A legelterjedtebb a Kínai tangram, aránylag ismert a Japán tangram, napjainkban pedig a Diaphan vagy Hajókészlet. Továbbá észrevehető, hogy négyzetlapok mellett téglalapokat is felosztanak darabokra, sőt szimmetrikus görbe vonalú alakzatokat vagy szabályos háromszöget, nyolcszöget is használnak.

Vitathatatlanul, a Kínai tangram egyike a legelterjedtebb és a legismertebb kirakójátékoknak. Ezért is emlegetik gyakran úgy, hogy a „klasszikus tangram”. Ez a tangram, a mellékelt ábrán látható 7 alakzattal áll. A továbbiakban mi is erre részletesebben kitérünk. A XIX. század közepén-végén mesterségesen keltett misztikus történetek szálltak szájról szájra a játék keletkezésére, mágikus erejére vonatkozóan.



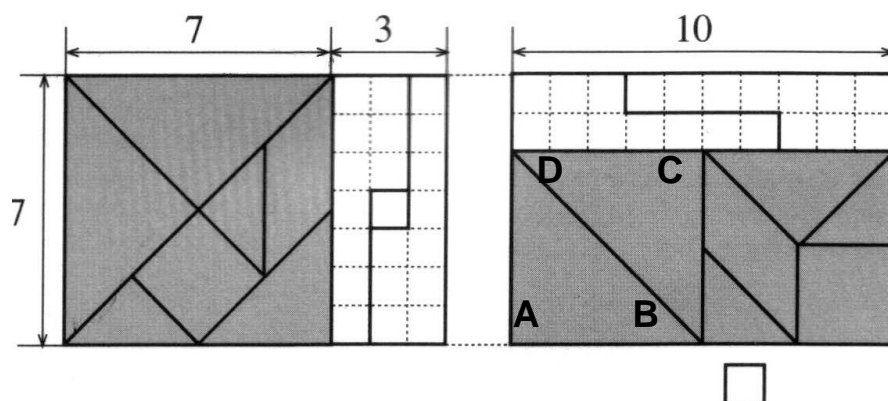
Valószínűleg Samuel Loyd, sok fejtető kitalálója és népszerűsítője kezdte terjeszteni a játék 4000 éves múltjára és a Tan istentől való eredetére vonatkozó legendákat. Jó reklámfogásnak bizonyult, mert hamarosan viharként vonult végig Európán és Amerikán a tangramőrület. Loyd maga is írt egy feladványokkal teli tangramkönyvet Tan nyolcadik könyve címmel, ezzel is a játék Tan istentől való eredetét hangsúlyozva.



Semmilyen hiteles forrás nem maradt fenn, amely a játék több ezer éves történetét igazolná. Az első írásos említés a XIX. század elejéről Kínából származik. Innen hozták be kereskedők, utazók Európába. Eleinte igazi kézműves remekek voltak ezek a játékok, elefántcsontból, féldrágakőből készítették őket. De mivel hamar felismerték a benne rejlő lehetőséget, megindult a tömeggyártás. Ekkor még egyszerűen kínai fejtető volt a neve, de az 1860-as években már megjelent az angol értelmező szótárban a tangram szó, ami egyértelműen ezt a játékot jelentette. (Később kezdték más hasonló kirakókra is alkalmazni.) Közkeletességét viszonylagos egyszerűsége is fokozta. Mindössze 7 elemből áll, olyanokból, amilyenekkel szinte mindenki találkozott iskolai tanulmányai során: 5 egyenlő szárú, derékszögű háromszög, egy négyzet és egy 45 fokos hegyesszöggel rendelkező paralelogramma.

A sok ezer ismert feladvány nagy része roppant szemléletesen ábrázol embereket, állatokat, betűket, különböző tárgyakat. A legtöbb kirakandó alakzatban kissé érződik a kelet misztikuma, bája. Ez is hozzájárult a játék népszerűségéhez, akkoriban divat volt minden, ami az ázsiai kultúrához köthető.

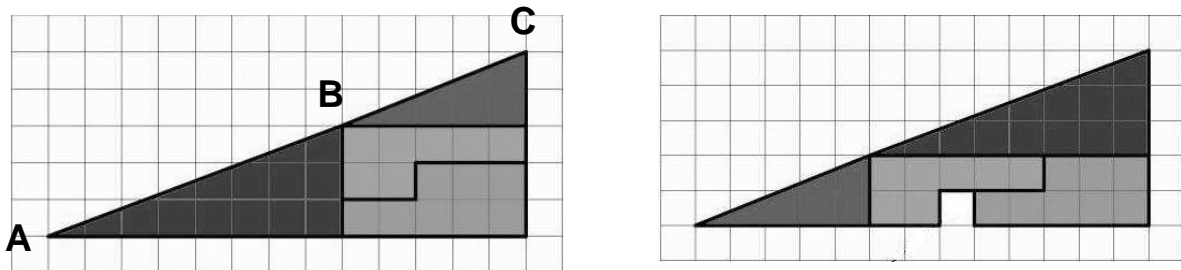
Többször is kezembe került a következő tangramkészlet, a „TangraMagic” aminek a szerzője G. Sarcone:



A készlet a sötét színű Kínai tangramból, a két egyforma fehér „L” alakú alakzatból, és a kisnégyzetből áll. A tangram doboza egy 7×10-es rekesz, ami az ábrán is látható. Ebbe kell belerakni a tangramkészletet. Látható, hogy egyféle kirakással, a baloldali ábrán az alakzatok

pontosan beleférnek a 7×10 -es rekeszbe. De ha átrendezzük ezeket, ahogy a jobboldali ábra is mutatja, akkor miután beleraktuk a 7×10 -es rekeszbe, megmarad a kisnégyzet, ez nem fér bele. Meglepő, nem de? Vajon mi az oka ennek?

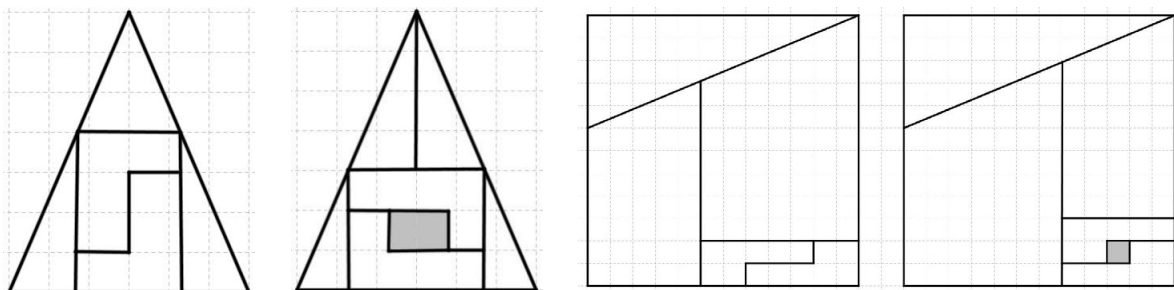
Mielőtt válaszolnánk a kérdésre, nézzünk még hasonló feladatot, amikor például nem pluszba marad meg darabocská, hanem éppen hiányzik. Nézzük csak az úgynevezett Curry-féle paradoxont:



A baloldali ábra négy alakzatát ha átrendezzük a jobboldali ábra mintájára, akkor ott egy kisnégyzetnyi üreg marad. Hogyan lehetséges ez?

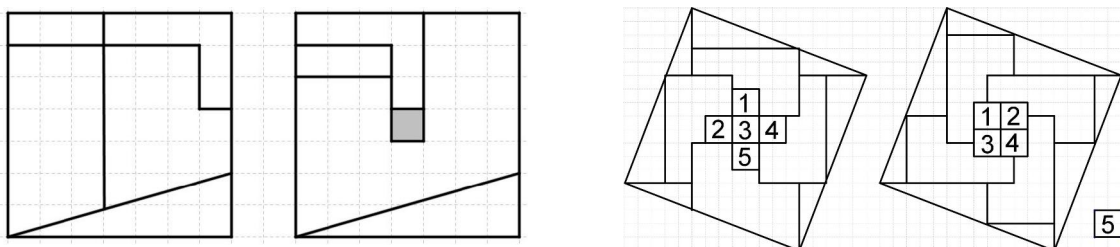
A TangraMagic esetén figyeljük meg, hogy a baloldali „fehér terület” $3 \times 7 = 21$ egység, a jobboldali is $2 \times 10 + 1 = 21$ egység, tehát itt nincs eltérés. Ellenben a baloldalon a sötét tangramkészlet $7 \times 7 = 49$ egység, míg a jobb oldalon $5 \times 10 = 50$ egység, vagyis éppen 1 egységgel több. Vajon mi az oka ennek? Látható, hogy a jobboldali BD szakasz a baloldali méretek szerint éppen 7 egység, ezért ha az $ABCD$ négyzet oldaléle x , akkor $x^2 + x^2 = 49$ ahonnan $x = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4,9497\dots$ ami nagyon közel áll az 5-höz, de annál egy picivel kisebb. Tehát

a jobboldali ábrán mint az $ABCD$ mint a mellette levő ugyanekkora négyzet mérete egy kicsit kisebb mint 5, és ez a hiány összesen éppen 1 egység, amint a megmaradt kisnégyzet mutatja. A Curry-féle paradoxonnak egy másik változata a következő baloldali ábrákon látható:



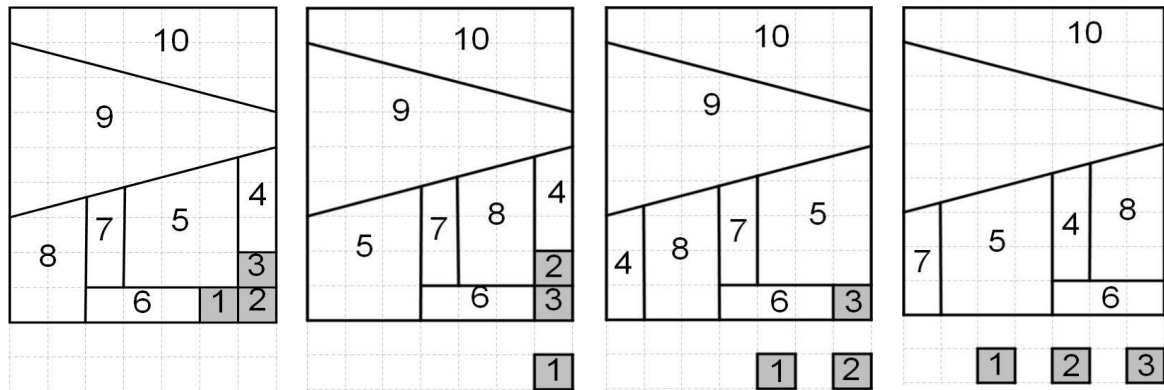
Ebben az esetben is az ellentmondás ugyanott van mint a Curry-féle kirakásban. Ugyancsak a ferde vonalak mentén meghúzódó rések miatt adódó paradoxon látható az előző jobb ábrákon.

Az előbbiekhöz hasonló kirakójáték-paradoxon látható a következőkben is, itt most változatosabb alakzatok jelen, ellenben itt is van ferde vonal, ami mentén szintén előállnak a kis rések. Érdekes felfigyelni arra, hogy míg a balabbi ábra méretei 7×7 egység, addig a jobbiké $7 \times 7 \frac{1}{7}$ egység, így ez összhangban van a megmaradt 1 egységgel.



A jobboldali két ábrán már nincsenek belső ferde vonalak, mégis előáll a paradoxon. Az oka itt is a balabbi ábrán van, a négyzet oldalai nem egyenesek, ezáltal kifelé domborodnak.

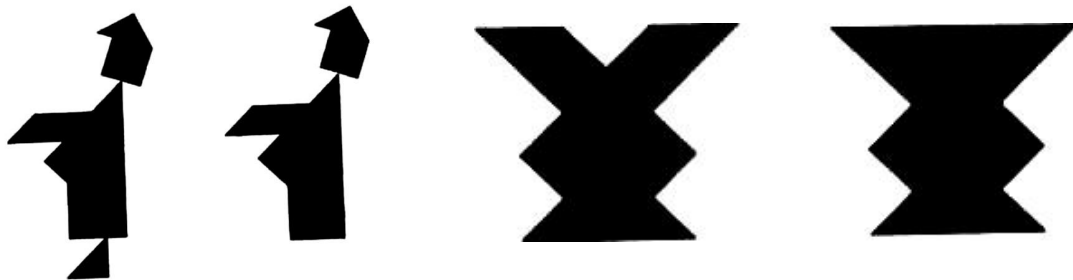
Ha valaki azt gondolná, hogy az előbbieknél nincs látványosabb paradoxon, hát akkor álljon itt előttünk a következő kirakójáték- paradoxon:



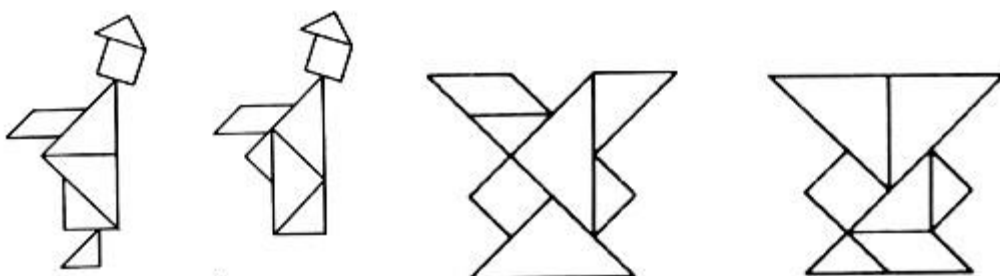
A baloldali ábrán egy 7×9 méretű téglalapot daraboltunk fel az első ábrán látható 10 alakzatra. Ezután átrendeztük az alakzatokat a második ábra szerint, és az 1-es alakzat megmaradt. Ezután egy újabb átrendezés során (a harmadik ábra) megmaradt még a 2-es alakzat is, sőt, egy harmadik átrendezés után a 3-as alakzat is megmaradt. Hogy lehet ez? Az előbbiekből tanulva csak úgy lehet, hogy ha a második, harmadik illetve negyedik ábrán a vonalak mentén valahol üres rések vannak. És ez valóban így van, számolásokkal ellenőrizhető, hogy az alsó ferde vonal mentén rések keletkeznek, és ezek területe rendre 1, 2 illetve 3 egység, és ezért jutunk azokhoz a látszólagos ellentmondásokra, hogy megmaradt 1, 2 illetve 3 kisnégyzet.

Az előbbieken bemutatott kirakójátékok esetén a jobb hatás elérése végett javasoljuk az Olvasónak, hogy például kartonból vágja is ki és készítse is el az alakzatokat, és meglepődve veheti észre, hogy a valóság nagyon jól szemlélteti a már leírtakat!

Ezek kapcsán jutnak eszembe a következő tangramcsodák, vagy tangram paradoxonok is: vegyünk 2 teljesen egyforma méretű Kínai tangramkészletet, és ezekből rakjuk ki a mellékelt ábrán látható két alakzatot. Ezt a problémát „A két szerzetes paradoxona” vagy „A féllábú kínai paradoxona” néven emlegetik, ugyanis megdöbbenve vehetjük észre, hogy „eltűnt” az egyik alakzatnak a lába. Hogy lehetséges ez?



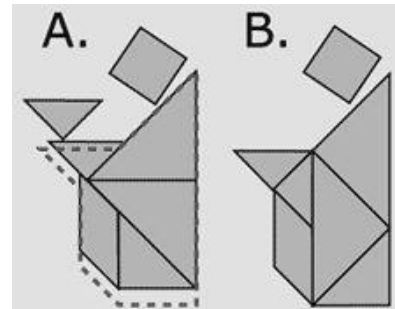
A jelenség nem egyedülálló, hiszen 2 azonos Kínai tangramkészlettel kirakható az előbbi ábrákon látható alakzatok is. Ez „A törött vázák paradoxona” néven ismeretes. És még sok más hasonló „rejtélyes eltűnés” szemtanúi lehetünk, mert számtalan ilyen paradoxon létezik, ezt még látni fogjuk. Ellenben gyorsan felmerül a kérdés, hogy a kirakások egyáltalán lehetségesek? Erre a válasz igenlő, íme az ábrák:



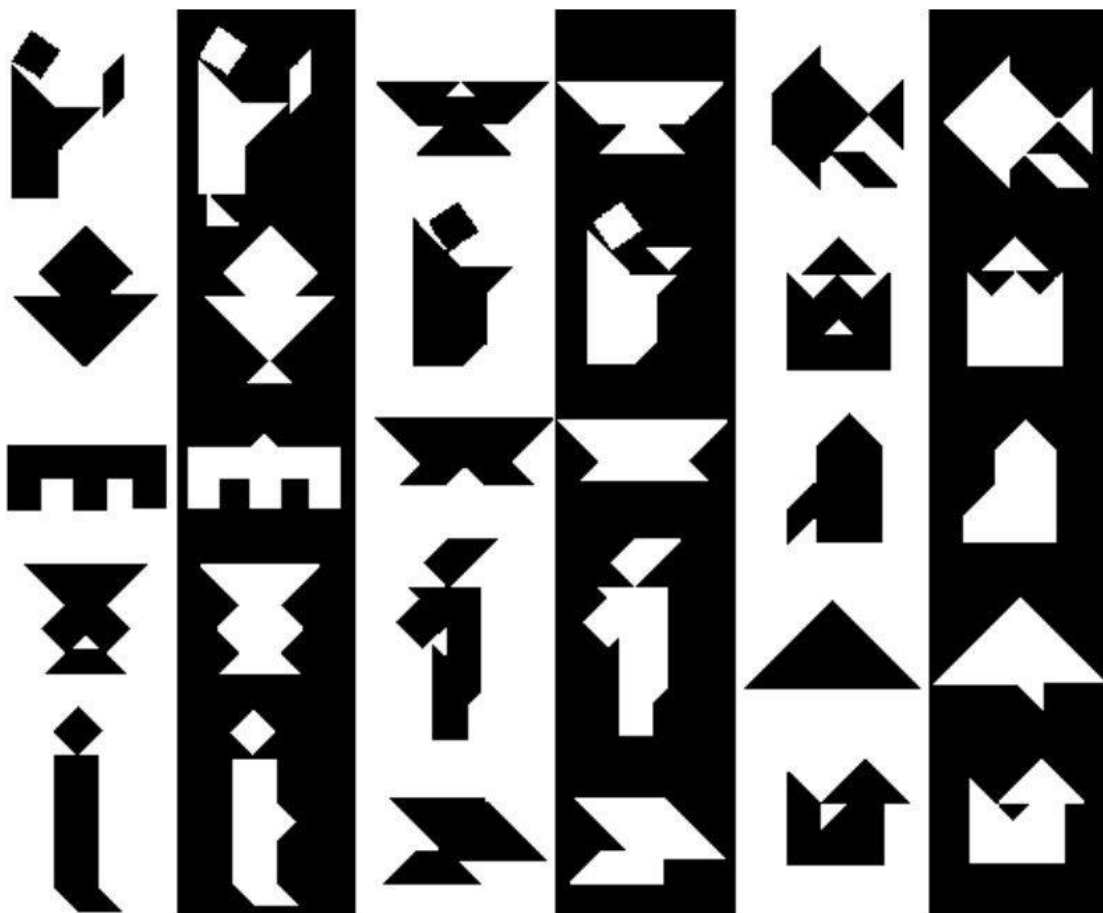
Tehát a kirakás mindkét esetben igaz! De hát akkor hol a hiba, hiszen a tangramkészletek teljesen egyformák, így a területeik is egyformák.

Ha jól megfigyeljük az alakzat-párokat, akkor könnyen észrevehető, hogy a csonka résztól eltekintve a két alakzat nem kongruens. Tehát akármilyen egyformának is tűnnek (hiszen az alakjuk nagyon hasonló), a méreteik mégsem egyeznek meg! Tehát a baloldali szerzetes „háromszög lába” tulajdonképpen „szétoszolva” megtalálható a láb nélküli szerzetesben, vagyis a baloldali szerzetes „soványabb”, míg a jobboldali „pocakosabb”. Ugyanez a helyzet a vázákkal is. Figyeljük meg, hogy a baloldali váza egy picit terjedelmesebb, sőt magasabb is. Ez valóban így is van, hiszen a baloldali váza csonka része valahol „eloszlott” a többi részben, így ami hiányzik a csonkaság miatt, az pluszban benne van a váza többi részében, tehát a jobboldali váza tényleg kisebb.

A jelenség jobb megértése végett, egy harmadik paradoxon esetén a megoldás mellett azt is szemléltetjük, hogy mely részen „oldódik bele” a pluszban levő rész a többi területbe. Az ábrán látható, hogy a baloldali alakzatnak van pluszban egy háromszög alakzata, a jobboldalinak pedig nincs. Más szóval a baloldali alakzat ennyivel „soványabb”, ezt a jobboldalihoz viszonyítva ki is hangsúlyoztuk, szaggatott vonallal megjelöltük, hogy hol is van a jobboldali alakzat „körvonala”, vagyis ha a plusz háromszöget „szétosztanánk” a szaggatott vonallal határolt világos rész mentén, akkor megkapnánk a jobboldali alakzatot. Tehát erre mondjuk, hogy a jobboldali alakzatnak nincs meg külön a háromszög alakzata ami a baloldalinak van, hanem úgymond „feloldódott” a többi alakzaba bele.



Végezetül, az érdeklődő Olvasót egy sor ilyen paradoxon-pár kirakására ösztönözzük a Kínai tangramkészlettel a következő ábrák által:



Az előző ábrán 15 pár paradoxon látható, mindenesetben ugyanazt a tangramkészletet használtuk, és mégis eltűntek, illetve pluszban jelentek meg alakzatok. Az érdeklődő Olvasónak azt javasoljuk, hogy mind a 15 esetben rakja ki a két alakzatot, így beláthatja, hogy a kirakás valóban kivitelezhető, és az „eltűnések” rejtélye is már ismert! Jó szórakozást, kellemes és hasznos időtöltést kívánok!

Szakirodalom:

- [1] Hársing Lajos: Tangram, Garabonciás Könyvkiadó, Budapest, 1988
- [2] Róka Sándor: Tangram, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó
- [3] Robert Hardy: Geometriai játékok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986
- [4] Tuzson Zoltán. Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2011, 191.- 195. old.
- [5] <http://www.archimedes-lab.org/tangramagicus/>
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html>
- [7] http://ro.wikipedia.org/wiki/Manuscrisul_lui_Arhimede