TERÜLETÁTALAKÍTÁSI FELADATOK RAJZOKBAN
(I. rész)

Tuzson Zoltán

A következő feladatokat egyéni munkára szántuk mind általános iskolás, mind líceumi tanulóknak. Az összegyűjtött feladatok nagy előnye az, hogy elkészített rajzok szemléltetik a feladatokat, és a rajzok mellett röviden feltüntetjük a feltevést és a következtetést. Ezáltal a tanulók rövidebb idő alatt elemezhetik a feladatokat, könnyebben megérthetik, gyorsabban megoldhatják és rövid idő alatt sok új ötletre tehetnek szert.

Amint a cím is jelzi, nem számértékes területszámolási feladatokról van szó (noha ilyenekre is átfogalmazhatók), hanem különféle síkbeli alakzatokra bontás és egyesítés által – kiváltképpen az analízis-szintézis, összehasonlítás, kiegészítés, összefüggések észlelése, rendezés, analógia, lényegkiemelés stb. gondolkodási műveleteket használva – kell bizonyítanunk adott összefüggéseket, a különböző alakzatok területei között.

Az ilyen típusú feladatok egyszerűnek tűnhetnek, már kezdetben vonzóak lehetnek, és a kreativitást igénylő és fejlesztő szerepük vitathatatlan.

Mindenek előtt ismerkedjünk meg röviden a terület fogalmával. Jelöljük S-sel a síkbeli sokszöglapok halmazát. Azt a négyzetlapot, amelynek élhossza 1 egység, terület-egységnek nevezzük, és E-vel jelöljük.

A terület egy olyan $T\colon S \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyet a következő axiómákkal értelmezünk:

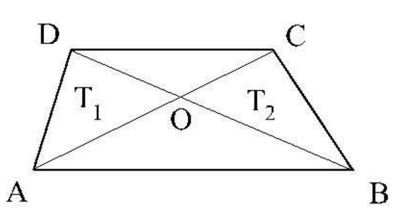
(1) Ha $E \in S$ a területegység, akkor $T(E) = 1$.

(2) Ha $S_1, S_2 \in S$, és $S_1 \equiv S_2$, akkor $T(S_1) = T(S_2)$.

(3) Ha $S_1, S_2 \in S$, és $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, akkor $T(S_1 \cup S_2) = T(S_1) + T(S_2)$.

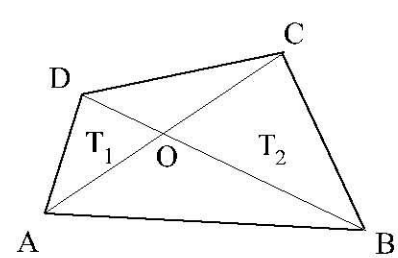
A következő feladatok megoldása során, mivel minden sokszöglapot háromszöglapokra lehet felbontani, ezért leggyakrabban csak a derékszögű és az általános háromszöglapok területszámolási képleteit használjuk. Ezek mellett gyakran használjuk a nevezetes négyszöglapok területszámolási képleteit, továbbá szinte ösztönszerűen használjuk a (2)-es és (3)-as axiómákat, és mindezek mellett a már említett gondolkodási műveleteket. A feladatok után útmutatásokat is találunk.

(1)



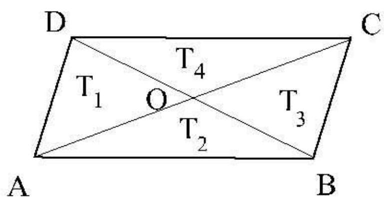
Ha $AB \parallel CD$, akkor $T_1 = T_2$.

(2)



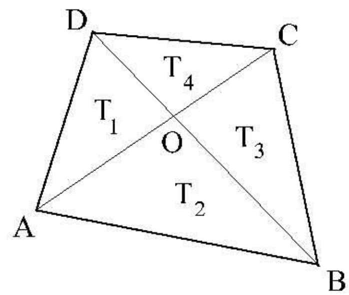
Ha $T_1 = T_2$, akkor $AB \parallel CD$.

(3)



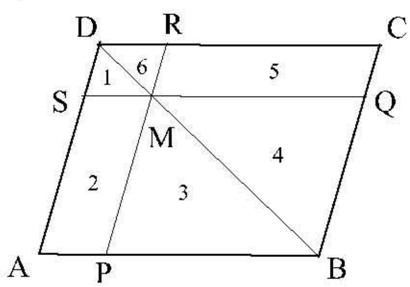
Ha $AB \parallel CD$ és $BC \parallel AD$, akkor $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$.

(4)



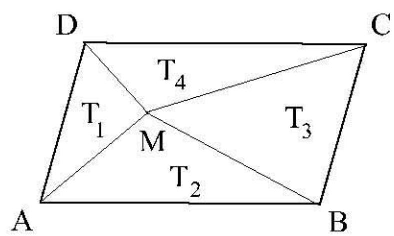
Ha $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$, akkor $AB \parallel CD$ és $BC \parallel AD$.

(5)



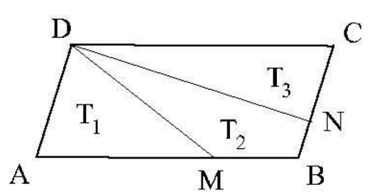
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $M \in BD$, $SQ \parallel AB$, $PR \parallel BC$, akkor $T_2 = T_5$.

(6)



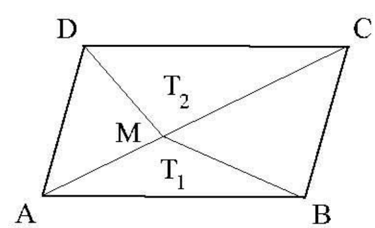
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ és M egy belső pont, akkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$.

(7)



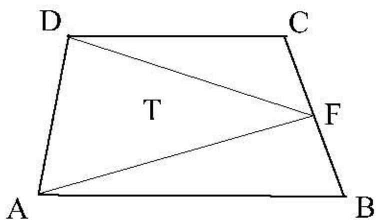
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AB = 3MB$, $BC = 3BN$, akkor $T_1 = T_2 = T_3$.

(8)



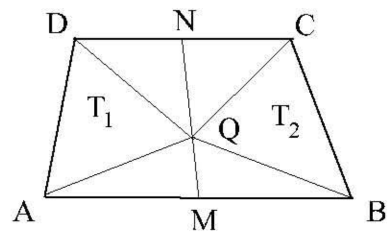
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ $M \in (AC)$, akkor $T_1 + T_2 = \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(9)



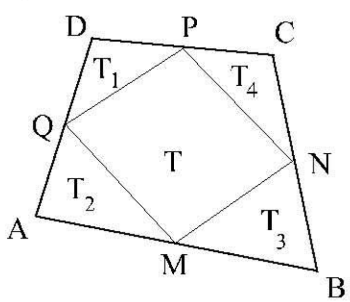
Ha $AB \parallel CD$, $BF = FC$, akkor $T = \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(10)



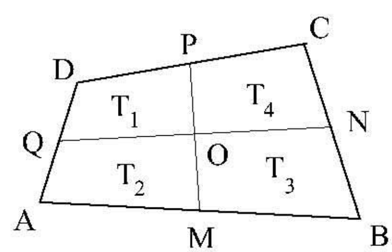
Ha $AB \parallel CD$, $AM = MB$, $CN = ND$, $Q \in (MN)$, akkor $T_1 = T_2$.

(11)



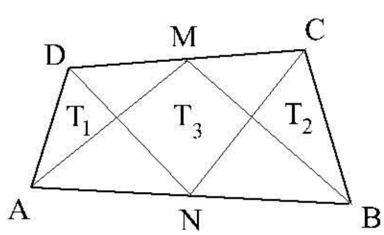
Ha $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$, $DQ = QA$, akkor $T = \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(12)



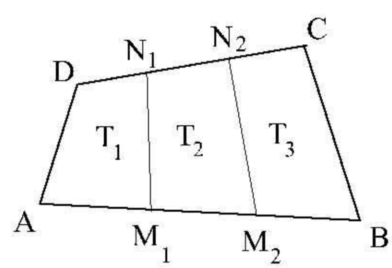
Ha $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$, $DQ = QA$, akkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4 = \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(13)



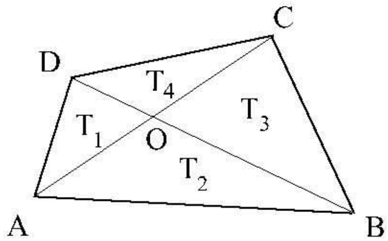
Ha $AN = NB$, $CM = MD$, akkor $T_1 + T_2 = T_3$.

(14)



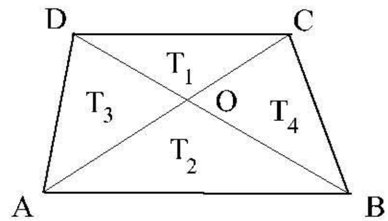
Ha $AM_1 = M_1M_2 = M_2B$, $CN_2 = N_2N_1 = N_1D$, akkor $T_2 = \frac{1}{2}(T_1 + T_3)$.

(15)



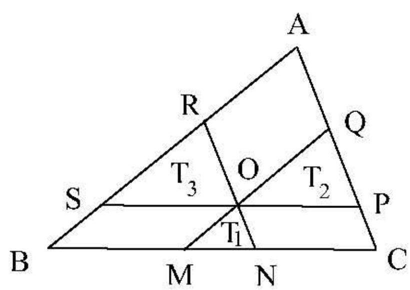
Ha $AC \cap BD = \{O\}$, akkor
$T_1T_3 = T_2T_4$.

(16)



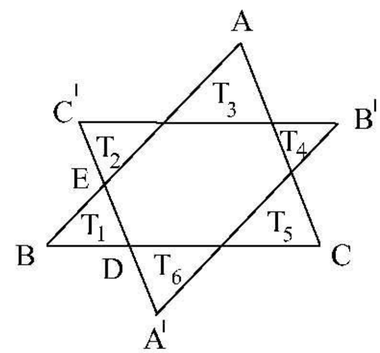
Ha $AB \parallel CD$, akkor
$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} = \sqrt{T(ABCD)}$.

(17)



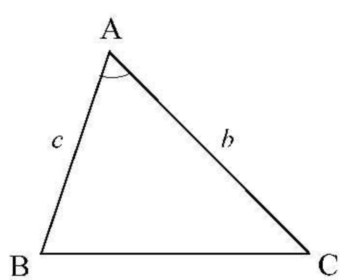
Ha O belső pont, $SP \parallel BC$,
$MQ \parallel AB$, $NR \parallel AC$, akkor
$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{T(ABC)}$.

(18)



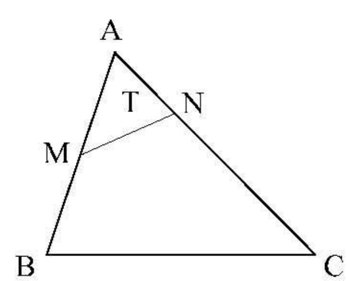
Ha $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$,
és $T = T(ABC)$, $T' = T(A'B'C')$, akko
$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} + \sqrt{T_4} + \sqrt{T_5} + \sqrt{T_6} =$
$= \sqrt{T} + \sqrt{T'}$.

(19)



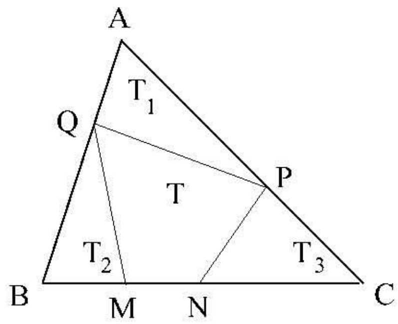
$$T(ABC) = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$$

(20)



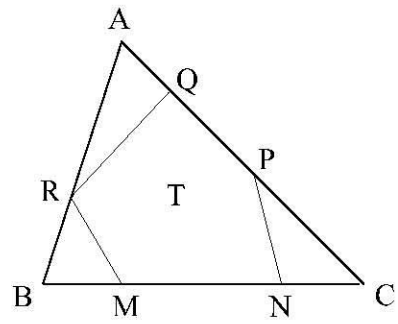
Ha $\dfrac{AM}{AB} = p$, $\dfrac{AN}{AC} = q$, $(p, q > 0)$,
akkor $T = pqT(ABC)$.

(21)



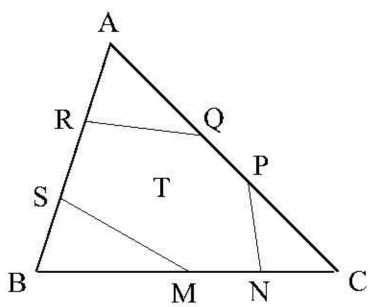
Ha $BM = MN = \frac{1}{4}BC$, $\frac{CP}{CA} = \frac{2}{5}$, $\frac{AQ}{AB} = \frac{1}{3}$, akkor $T = \frac{13}{30}T(ABC)$.

(22)



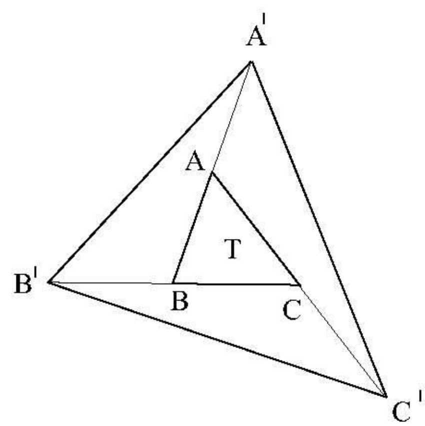
Ha $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{4}$, $\frac{CP}{CA} = \frac{PQ}{CA} = \frac{2}{5}$, $\frac{BR}{BA} = \frac{1}{3}$, akkor $T = \frac{41}{60}T(ABC)$.

(23)



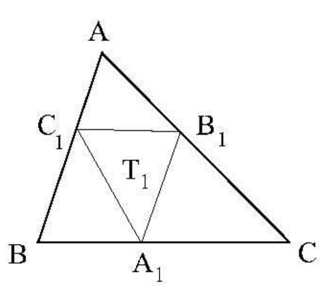
Ha $\frac{MN}{BC} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{4}$, $CP = AQ = \frac{2}{5}AC$, $AR = SB = \frac{1}{3}AB$, akkor $T = \frac{3}{5}T(ABC)$.

(24)



Ha $B'B = BC$, $C'C = AC$, $A'A = AB$, akkor $T(A'B'C') = 7T$

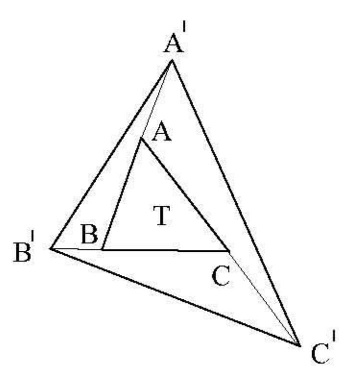
(25)



Ha $BA_1 = p \cdot A_1C$, $CB_1 = q \cdot B_1A$, $AC_1 = r \cdot C_1B$, $p, q, r > 0$, akkor

$$T_1 = \frac{1 + pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)}T(ABC).$$

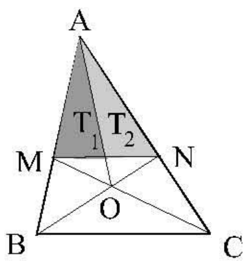
(26)



Ha $B'B = p \cdot B'C$, $C'C = q \cdot C'A$, $A'A = r \cdot A'B$, $0 < p, q, r < 1$, akkor

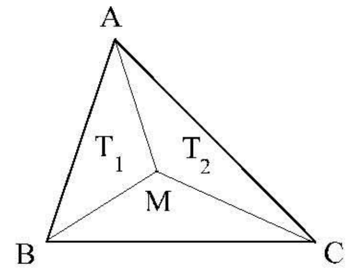
$$T(A'B'C') = \frac{1 - pqr}{(1-p)(1-q)(1-r)}T.$$

(27)



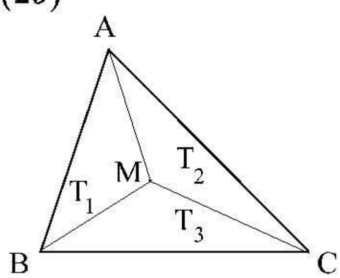
Ha $MN \parallel BC$, $\{O\} = BN \cap CM$, akkor $T_1 = T_2$.

(28)



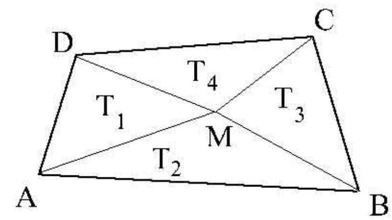
Ha M tetszőleges belső pont és $T_1 = T_2$, akkor M az A-ból húzott oldalfelezőn van.

(29)



Ha M tetszőleges belső pont és $T_1 = T_2 = T_3$, akkor M a háromszög súlypontja.

(30)



Ha M tetszőleges belső pont és $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$, akkor $ABCD$ paralelogramma.

Útmutatások a feladatok megoldásához

(1) $T(ABD) = T(ABC) \Rightarrow T_1 + T(OAB) = T_2 + T(OAB) \Rightarrow T_1 = T_2$.

(2) $T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 + T(OAB) = T_2 + T(OAB) \Rightarrow T(ABD) = T(ABC) \Rightarrow AB \parallel CD$.

(3) Az (1)-et alkalmazzuk kétszer.

(4) A (2)-t alkalmazzuk kétszer.

(5) $T(ABD) = T(CBD)$ és $T_1 = T_6$, $T_3 = T_4 \Rightarrow T_2 = T_5$. ($PBQM$ paralelogramma)

(6) Legyenek rendre m_1, m_2, m_3, m_4 az M-ből az AD, AB, BC, CD oldalakra húzot magasságok hossza. Így $T_1 = \dfrac{AD \cdot m_1}{2}$, $T_2 = \dfrac{AB \cdot m_2}{2}$, $T_3 = \dfrac{BC \cdot m_3}{2}$, $T_4 = \dfrac{DC \cdot m_4}{2}$ $\Rightarrow T_1 + T_3 = T_2 + T_4$.

(7) $T_1 = \dfrac{2}{3}T(ABD) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}T(ABCD)$, hasonlóan $T_3 = \dfrac{1}{3}T(ABCD)$.

(8) Legyen m_1, illetve m_2 az M pont távolsága az AB, illetve CD oldalaktól.

Akkor $T_1 = \dfrac{AB \cdot m_1}{2}$, $T_2 = \dfrac{CD \cdot m_2}{2} \Rightarrow T_1 + T_2 = \dfrac{1}{2}T(ABCD)$.

(9) Legyen $E \in (AD)$ úgy, hogy $AE = ED$ és m_1, illetve m_2 a D, illetve A pontol távolsága az EF-től.

Ekkor $T(DEF) = \dfrac{EF \cdot m_1}{2} = \dfrac{(AB + CD) \cdot m_1}{4}$, $T(AEF) = \dfrac{(AB + CD) \cdot m_2}{4}$.

(10) $T(AMND) = T(MBCN)$, $T(AMQ) = T(MBQ)$, $T(CQN) = T(DQN)$.

(11) $T_1 = \frac{1}{4}T(DAC)$, $T_3 = \frac{1}{4}T(BAC) \Rightarrow T_1 + T_3 = \frac{1}{4}T(ABCD)$, hasonlóan $T_2 + T_4 = $
$= \frac{1}{4}T(ABCD)$.

(12) $T(DQP) + T(BMN) = \frac{1}{4}T(ABCD)$ (a (11) alapján), $T(POQ) = T(MON) =$
$= \frac{1}{4}T(MNPQ) = \frac{1}{8}T(ABCD)$ ((11) és (3) alapján) $\Rightarrow T_1 + T_3 = \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(13) $T(ABCD) = T(ADM) + T(AMB) + T(BMC)$.
Igazolható, hogy $T(ADN) + T(BNC) = T(AMB)$.

(14) $T_2 = T(M_1N_1M_2) + T(N_1N_2M_2) = \frac{1}{2}T(N_1AM_2) + \frac{1}{2}T(M_2N_1C) =$
$= \frac{1}{2}T(AN_1C) + \frac{1}{2}T(CAM_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}T(ADC) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}T(CAB) = \frac{1}{3}T(ABCD) =$
$= \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$.

(15) Legyen $DD' \perp AC$; $BB' \perp AC$. Ekkor $T_1 = \frac{1}{2}AO \cdot DD'$, $T_2 = \frac{1}{2}AO \cdot BB'$, $T_3 = \frac{1}{2}CO \cdot BB'$, $T_4 = \frac{1}{2}CO \cdot DD'$.

(16) $\sqrt{T(ABCD)} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} \iff T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T_1 + 2\sqrt{T_1T_2} + T_2 \iff$
$\iff T_3 + T_4 = 2\sqrt{T_1T_2} \overset{(15)}{\iff} T_3 + T_4 = 2\sqrt{T_3T_4} \iff T_3 = T_4$.

(17) Legyenek rendre x, y, z az O pont távolságai a $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ oldalaktól, h_a, h_b, h_c az ABC háromszög megfelelő magasságai és $T = T(ABC)$. Ekkor $\frac{T_1}{T} = \left(\frac{x}{h_a}\right)^2 =$
$= \left(\frac{ax}{2T}\right)^2$ és az analógjai, ugyanakkor $ax + by + cz = 2T$.

(18) $\sqrt{\frac{T'}{T_1}} = \frac{A'C'}{DE} = \frac{C'E + ED + DA'}{ED} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + \sqrt{\frac{T_1}{T_1}} + \sqrt{\frac{T_6}{T_1}}$.
Tehát $\sqrt{T'} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_6}$, hasonlóan igazolható, hogy $\sqrt{T} = \sqrt{T_3} + \sqrt{T_4} + \sqrt{T_5}$.

(19) Legyen $BB' \perp AC$, így $T(ABC) = \frac{1}{2}BB' \cdot AC$ és $\sin A = \frac{BB'}{AB}$.

(20) A (19) alapján $T = \frac{1}{2}AM \cdot AN \sin A = pq\frac{AB \cdot AC \sin A}{2} = pqT(ABC)$.

(21) A (20) alapján $T_1 = \frac{1}{5}T(ABC)$, $T_2 = \frac{1}{6}T(ABC)$, $T_3 = \frac{1}{5}T(ABC)$ és

$T = T(ABC) - T_1 - T_2 - T_3 \Rightarrow T = \frac{13}{30}T(ABC)$.

(22) A (20) alapján $T(ARQ) = \frac{2}{15}T(ABC)$, $T(BMR) = \frac{1}{12}T(ABC)$, $T(CNP) =$
$= \frac{1}{10}T(ABC)$, így $T = \left(1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{12} - \frac{1}{10}\right)T(ABC) = \frac{41}{60}T(ABC)$.

(23) A (20) alapján $T(ARQ) = \frac{2}{15}T(ABC)$, $T(BMS) = \frac{1}{6}T(ABC)$,

$T(CNP) = \frac{1}{10}T(ABC)$, így $T = \left(1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)T(ABC) = \frac{3}{5}T(ABC)$.

(24) $AC = CC' \Rightarrow T(C'CB) = T$, $CB = BB' \Rightarrow T(C'CB) = T(C'BB')$, tehát

$T(CB'C') = 2T$.

(25) A (20) alapján $T(AB_1C_1) = \frac{r}{1+r} \cdot \frac{1}{1+q} T$, $T(BA_1C_1) = \frac{p}{1+p} \cdot \frac{1}{1+r} T$ $T(CA_1B_1) = \frac{q}{1+q} \cdot \frac{1}{1+p} T$, ahol $T = T(ABC)$, és $T_1 = T - T(AB_1C_1) - T(BA_1C_1) - T(CA_1B_1)$.

(26) Követhető a (24) ötlete, vagy a (20) szerint $T(AA'C') = \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{1-q} T$, $T(BB'A') = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1}{1-r} T$, $T(CC'B') = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-p} T$.

(27) Az O ponton át meghúzzuk a BC-vel párhuzamos EF egyenest, $E \in (BM)$ $F \in (CN)$, $\{D\} = AO \cap MN$. Igazolható, hogy $EO = OF$, és így $MD = DN \Rightarrow T_1 = T_2$.

(28) Legyen AD oldalfelező és M az AD bal oldalán. Mivel $T_1 = T_2$ és $T(MBD) = T(MCD)$, ezért $T(ABDM) = T(ACDM) \iff T(ABD) - T(AMD) = T(ACD) + T(AMD)$. Azonban $T(ABD) = T(ACD) \Rightarrow T(AMD) = 0 \Rightarrow A, M, D$ kollineárisak.

(29) A (28) szerint M rajta van mind a három oldalfelezőn.

(30) A (28) szerint M rajta van a B pont és az $[AC]$ felezőpontját összekötő szakaszon ugyanakkor rajta van a C pont és a $[BD]$ felezőpontját összekötő szakaszon, és így tovább Ekkor AC és BD felezik egymást.