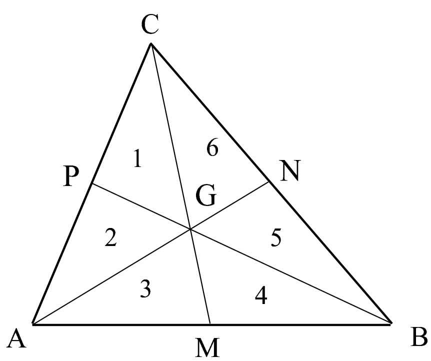
TERÜLETÁTALAKÍTÁSI FELADATOK RAJZOKBAN
(II. rész)

Tuzson Zoltán

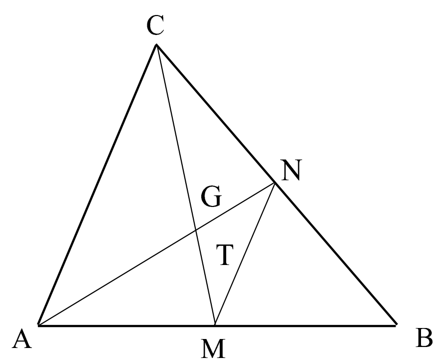
Az itt összegyűjtött 30 feladat nagyrésze az anyaországban, a különböző matematikai versenyeken kitűzött feladatokra, ezek átfogalmazására vagy általánosítására épül. Ezúttal szeretném kifejezni hálás köszönetemet Róka Sándor főiskolai docens barátomnak, akinek a megjelent igen tartalmas könyvei és munkafüzetei lehetővé tették, hogy hozzáférjek ezekhez a feladatokhoz. Számos feladatban hivatkozunk az előző részben közölt feladat valamelyikére, ilyen esetben annak a számát jelöljük meg, ezért kezdődik itt a számozás 31-től. Nagyon remélem, hogy a közölt 60 feladat tartalmas segítséget nyújt az érdeklődők számára.

(31)



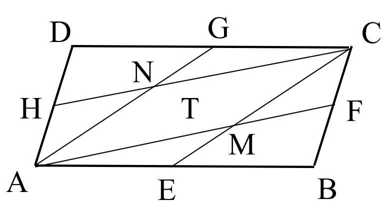
Ha $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PA$ és $AN \cap BP \cap CM = \{G\}$, akkor $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = \frac{1}{6}T(ABC)$.

(32)



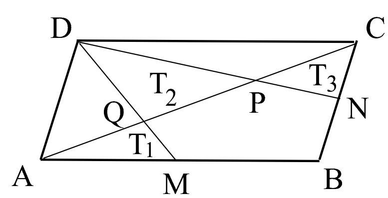
Ha $AM = MB$, $BN = NC$, $AN \cap CM = \{G\}$, akkor $T = \frac{1}{12}T(ABC)$.

(33)



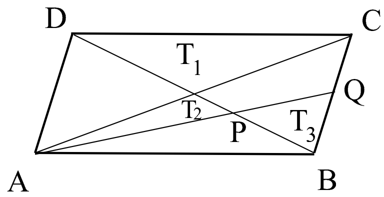
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AE = EB$, $BF = FC$, $CG = GD$, $DH = HA$, akkor $T = \frac{1}{3}T(ABCD)$.

(34)



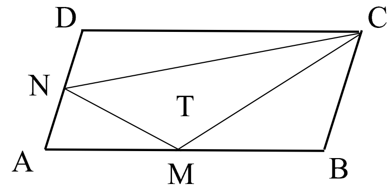
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AM = MB$, $BN = NC$, akkor $T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{3}T(ABCD)$.

(35)



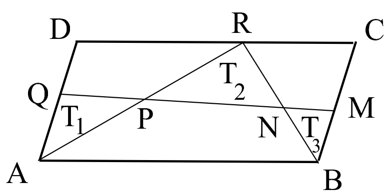
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,
$BQ = QC$ és $BD \cap AQ = \{P\}$, akkor
$T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{5}{12} T(ABCD)$.

(36)



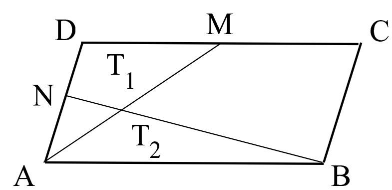
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ és
$AM = MB$, $AN = ND$, akkor
$T = \dfrac{3}{8} T(ABCD)$.

(37)



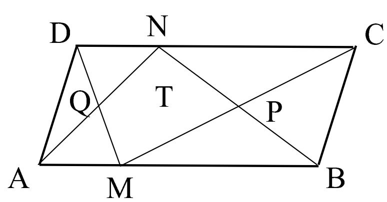
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,
$R \in (CD)$ tetszőleges, $BM = DQ$,
akkor $T_1 + T_3 = T_2$.

(38)



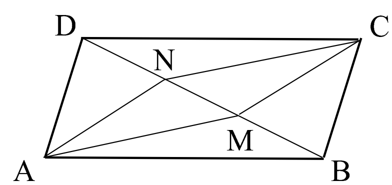
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,
$CM = MD$ és $DN = NA$,
akkor $T_1 = T_2$.

(39)



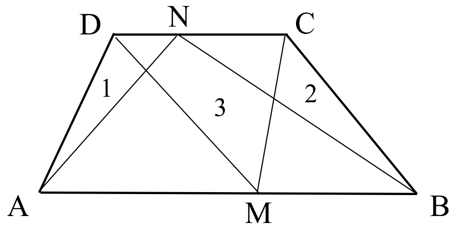
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ és
$AM = DN$, akkor $T = \dfrac{1}{4} T(ABCD)$.

(40)



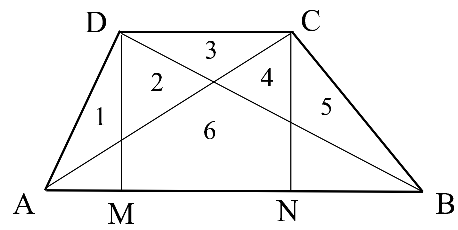
Ha $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ és
$BM = MN = ND$, akkor
$T(AMCN) = \dfrac{1}{3} T(ABCD)$.

(41)



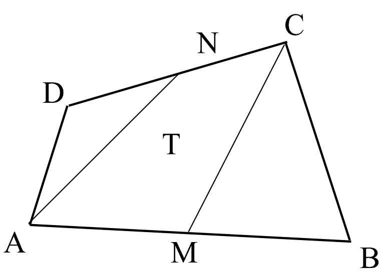
Ha $AB \parallel CD$, $M \in (AB)$ és $N \in (CD)$ tetszőlegesek, akkor $T_1 + T_2 = T_3$.

(42)



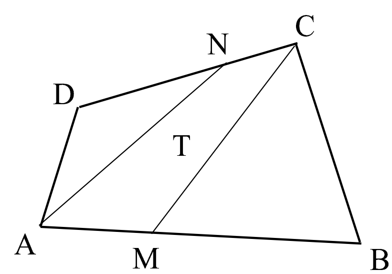
Ha $AB \parallel CD$, $DM \perp AB$ és $CN \perp AB$, akkor $T_1 + T_3 + T_5 = T_6$.

(43)



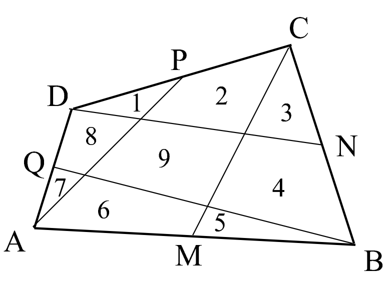
Ha $AM = MB$ és $CN = ND$, akkor $T = \dfrac{1}{2}T(ABCD)$.

(44)



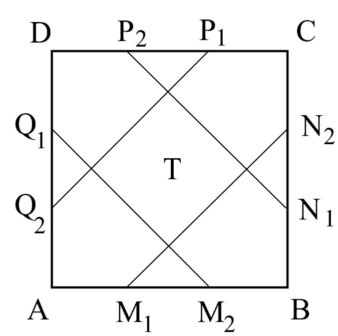
Ha $MB = 2MA$, $ND = 2NC$, akkor $T = \dfrac{1}{3}T(ABCD)$.

(45)



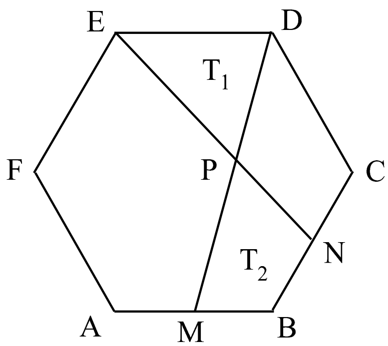
Ha $AM = MB$, $BN = NC$, $CP = PD$, $DQ = QA$, akkor $T_1 + T_3 + T_5 + T_7 = T_9$.

(46)



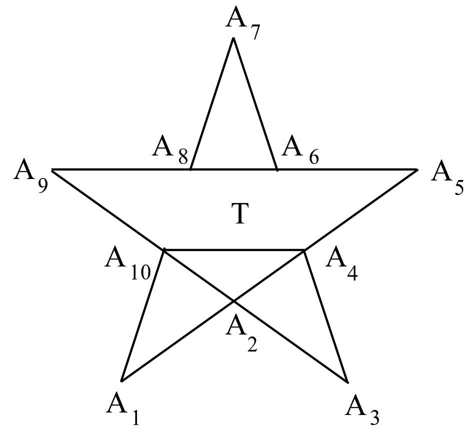
Ha $ABCD$ négyzet és $M_1, M_2, N_1, N_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2$ harmadoló pontok, akkor $T = \dfrac{2}{9}T(ABCD)$.

(47)



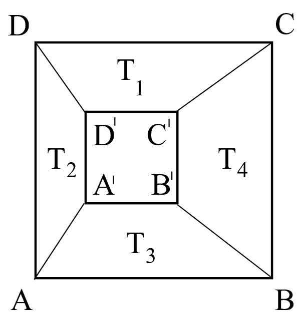
Ha $ABCDEF$ szabályos hatszög, $AM = MB$ és $BN = NC$, akkor $T_1 = T_2$.

(48)



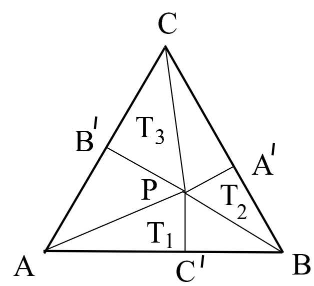
Ha $A_1A_2\ldots A_9A_{10}$ szabályos csillagötszög, akkor $T = \dfrac{1}{2}T(A_1A_2\ldots A_9A_{10})$.

(49)



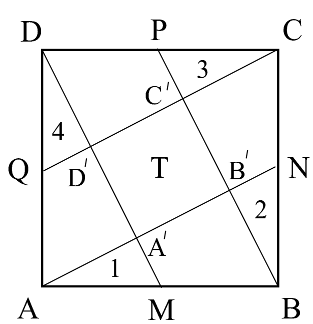
Ha $ABCD$ és $A'B'C'D'$ párhuzamos oldalú négyzetek, akkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$.

(50)



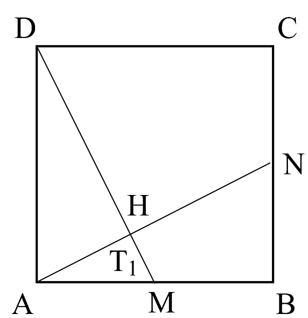
Ha $AB = BC = CA$, $P \in \mathrm{Int}(ABC)$ tetszőleges, $PA' \perp BC$, $PB' \perp CA$, $PC' \perp AB$, akkor $T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{1}{2}T(ABC)$.

(51)



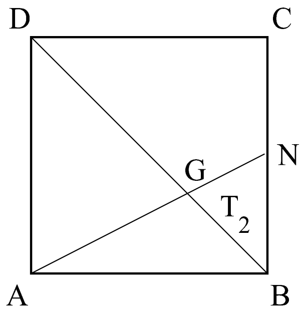
Ha $ABCD$ négyzet, M, N, P, Q felezőpontok, akkor $T = \dfrac{1}{5}T(ABCD)$.

(52)



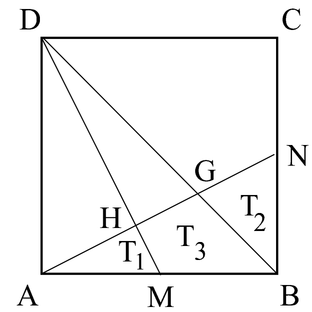
Ha $ABCD$ négyzet, és $AM = MB$, $BN = NC$, akkor $T_1 = \dfrac{1}{20}T(ABCD)$.

(53)



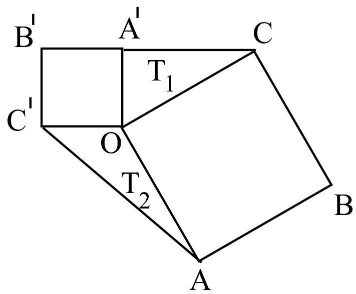
Ha $ABCD$ négyzet és $BN = NC$, akkor $T_2 = \frac{1}{12} T(ABCD)$.

(54)



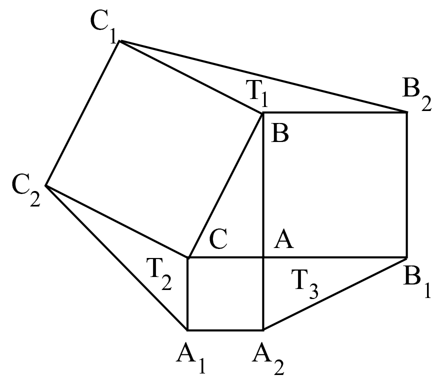
Ha $ABCD$ négyzet, $AM = MB$, $BN = NC$, akkor $T_3 = \frac{7}{60} T(ABCD)$.

(55)



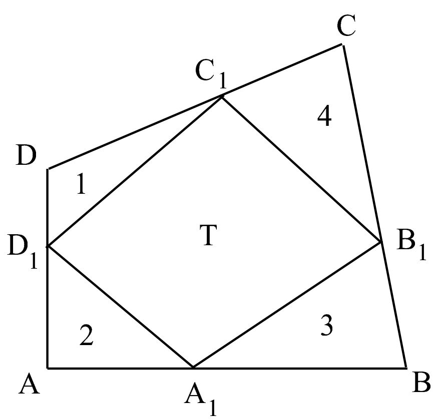
Ha $OABC$ és $OA'B'C'$ négyzetek, akkor $T_1 = T_2$.

(56)



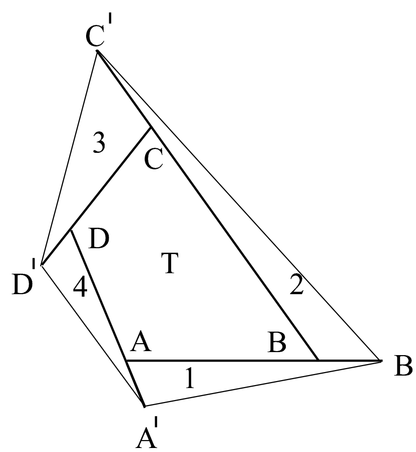
Ha $CA \perp BA$, ACA_1A_2, BAB_1B_2, CBC_1C_2 négyzetek, akkor $T_1 = T_2 = T_3$.

(57)



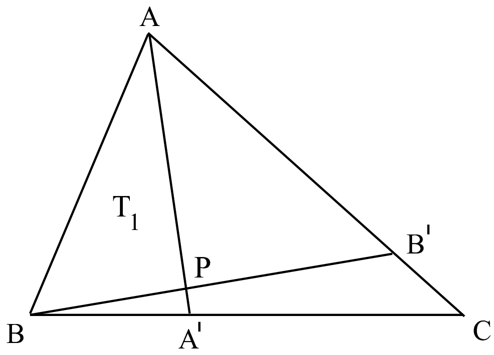
Ha $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = k > 0$ akkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ és $T = \frac{k^2+1}{k^2+2k+1} \cdot T(ABCD)$.

(58)



Ha $\frac{AA'}{A'D} = \frac{BB'}{B'A} = \frac{CC'}{C'B} = \frac{DD'}{D'C} = k$, $k \in (0,1)$, akkor $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ és $T(A'B'C'D') = \frac{k^2+1}{k^2-2k+1} \cdot T$.

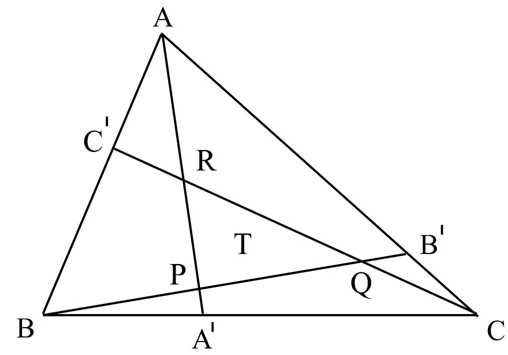
(59)



Ha $\dfrac{BA'}{A'C} = p$, $\dfrac{CB'}{B'A} = q$; $p, q > 0$,

akkor $T_1 = \dfrac{p}{pq+p+1} \cdot T(ABC)$.

(60)



Ha $\dfrac{BA'}{A'C} = p$, $\dfrac{CB'}{B'A} = q$, $\dfrac{AC'}{C'B} = r$

és $p, q, r > 0$, akkor

$$T = \frac{(pqr-1)^2}{(pq+q+1)(qr+r+1)(rp+p+1)} T(ABC).$$

Útmutatások a feladatok megoldásához

(31) $T(AMC) = \dfrac{1}{2}T(ABC)$, mert $AM = \dfrac{1}{2}AB$, $T_3 = \dfrac{1}{3}T(AMC)$, mert $MG = \dfrac{1}{3}MC$, $T_3 = \dfrac{1}{6}T(ABC)$.

(32) Legyen $P \in CA$ úgy, hogy $AP = PC$. Így G az $MNP\Delta$ súlypontja.

$T = 2 \cdot \dfrac{1}{6}T(MNP)$ a (31) alapján , és $MNP\Delta \equiv CPN\Delta \equiv PAM\Delta \equiv NMB\Delta$.

(33) Legyen $AC \cap BD = \{O\}$. Ekkor M az $ABC\Delta$ és N az $ADC\Delta$ súlypontja és a (31) alapján $T(ACN) = 2 \cdot \dfrac{1}{6}T(ACD)$, $T(ACM) = 2 \cdot \dfrac{1}{6}T(ACB)$, de $T(ACD) + T(ACB) = T(ABCD)$.

(34) Legyen $AC \cap BD = \{O\}$. Ekkor Q a $BAD\Delta$ és P a $BCD\Delta$ súlypontja, és a (31) feladat alapján $T_1 + T(QOD) = 2 \cdot \dfrac{1}{6}T(ABD)$, $T_3 + T(POD) = 2 \cdot \dfrac{1}{6}T(BCD)$, de $T(QOD) + T(POD) = T_2$.

(35) A (31) alapján $T_2 = T_3 = \dfrac{1}{6}T(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6}T(ABCD)$, $T_1 = \dfrac{1}{4}T(ABCD)$, $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12}$.

(36) Meghúzzuk a BD és az AC átlókat. MN középvonal, így $T(AMN) = \dfrac{1}{4}T(ABD) = \dfrac{1}{8}T(ABCD)$; $T(ACN) = \dfrac{1}{2}T(ACD) = \dfrac{1}{4}T(ABCD) = \dfrac{1}{2}T(ABC) = T(ACM)$.

$$T = T(ACN) + T(ACM) - T(AMN) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) T(ABCD) = \frac{3}{8}T(ABCD).$$

(37) $T(ABMQ) = T(CDQM) = \frac{1}{2}T(ABCD)$. De $\frac{1}{2}T(ABCD) = T(ABR) = T_2 + T(ABNP) = T_2 + T(ABMQ) - T_1 - T_3 = T_2 - T_1 - T_3 + \frac{1}{2}T(ABCD)$.

(38) Legyen $AA' \perp CD$; $|AA'| = m$ és $AB = CD = h$; $AM \cap BN = \{O\}$.

$T(ANB) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{m}{2} = \frac{hm}{4}$, $T(AMD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot m = \frac{hm}{4} \Rightarrow T(ANB) - T(AON) = T(AMD) - T(AON) \Rightarrow T_1 = T_2$.

(39) Meghúzzuk MN-et. A (3) szerint $T(AMQ) = T(MQN) = T(NQD) = T(DQA) \overset{\text{jel.}}{=} t_1$ és $T(MBP) = T(BPC) = T(CPN) = T(NPM) \overset{\text{jel.}}{=} t_2$;

$4(t_1 + t_2) = T(ABCD)$.

(40) $T(MCN) = \frac{1}{3}T(BCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}T(ABCD)$; hasonlóan $T(MAN) = \frac{1}{6}T(ABCD)$; $T(AMCN) = 2 \cdot \frac{1}{6}T(ABCD) = \frac{1}{3}T(ABCD)$. A feladat egyenértékű a (33)-mal.

(41) Meghúzzuk az MN szakaszt, az $AMND$ és a $BMNC$ trapézok esetén alkalmazzuk az (1)-et és összegezünk.

(42) $T(ADC) = T(BCD) = \frac{1}{2}T(MNCD)$,

$T_2 + T_3 + T_4 + T_6 = T(MNCD) = T(ADC) + T(BCD) = T_1 + T_2 + 2T_3 + T_4 + T_5$.

(43) Meghúzzuk az AC átlót. Jelölje $T_1 = T(AND)$, $T_2 = T(ACN)$, $T_3 = T(CAM)$, $T_4 = T(CMB)$. Mivel $T_1 = T_2$ és $T_3 = T_4 \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T(ABCD) \iff 2(T_2 + T_3) = T(ABCD) \iff 2T = T(ABCD)$.

(44) Meghúzzuk az AC átlót és AN'-et úgy, hogy $DN' = N'N$, $N' \in DC$. Az AC bal oldalán 3 darab ugyanazon T_1 területű háromszög keletkezik. Hasonlóan $M' \in AB$ úgy, hogy $MM' = M'B$, az AC jobb oldalán 3 azonos T_2 területű háromszög keletkezik.

$3(T_1 + T_2) = T(ABCD) \iff 3T = T(ABCD)$.

(45) A (43) alapján $T_2 + T_9 + T_6 = \frac{1}{2}T(ABCD) = T_8 + T_9 + T_4 \Rightarrow T_2 + T_4 + T_6 + T_8 + 2T_9 = T(ABCD) = T_1 + T_2 + \ldots + T_9 \Rightarrow T_9 = T_1 + T_3 + T_5 + T_7$.

(46) Meghúzzuk az M_1P_2, M_2P_1, N_1Q_2, N_2Q_1 szakaszokat, így 9 kongruens négyzetet kapunk.

(47) $DMBC \equiv ENCD$, mindkettő területéből kivonjuk a $T(NCDP)$-t.

(48) Meghúzzuk az A_8A_{10}, A_4A_6 és A_4A_8 szakaszokat, ekkor az $A_4A_5A_9A_{10}$ négy darabja éppen az ezen kívüli további 4 darabbal fedésbe hozható.

(49) Legyen $AB = x$ és $A'B' = y$, a T_1, illetve T_3 területű trapézok magassága m_1, illetve m_3.

$T_1 = \frac{(x+y) \cdot m_1}{2}$, $T_3 = \frac{(x+y) \cdot m_3}{2} \Rightarrow T_1 + T_3 = \frac{x+y}{2} \cdot (m_1 + m_3) = \frac{x+y}{2}(x - y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Hasonlóan $T_2 + T_4 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

(50) A P ponton keresztül rendre párhuzamosokat húzunk a három oldallal. Ekkor 3 darab szabályos kisháromszög és 3 darab paralelogramma keletkezik. Mind a 6 alakzatnak fele valamelyik számozott részből, másik fele nem számozott részből áll.

(51) Az 1, 2, 3 és 4-gyel jelölt kongruens háromszögeket forgassuk el az M, N, P, Q pontok körül, amíg összeilleszkednek az MB, NC, PD és QA oldalakkal. Így egy kereszt adódik, ami 5 egybevágó négyzetből áll, a közepén a T területű.

(52) Az (51). feladat ábráján látható, hogy $T_1 = \frac{1}{4}T$, továbbá a megoldásból $T = \frac{1}{5}T(ABCD)$, így $T_1 = \frac{1}{20}T(ABCD)$.

(53) $GBN\Delta \sim GDA\Delta$, a hasonlósági arány $\frac{1}{2}$, ezért a $GBN\Delta$-nek a BN oldalhoz tartozó magassága $\frac{1}{2}$-e a $GDA\Delta$-nek a DA oldalhoz tartozó magasságnak, vagyis $\frac{1}{3}$-a a négyzet oldalának. Tehát $T_2 = \frac{1}{3 \cdot 4}T(ABCD)$.

(54) $T(ABN) = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{4}T(ABCD)$. Az (52) és (53) szerint $T_1 = \frac{1}{20}T(ABCD)$ és $T_2 = \frac{1}{12}T(ABCD)$, $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}\right) = \frac{7}{60}$.

(55) Legyen $A'O_1 \parallel OC$ és $A'O_1 = OC$; $AO_2 \parallel OC'$ és $AO_2 = OC'$. Ekkor $OCO_1A' \equiv$ $\equiv OAO_2C'$ paralelogrammák.

(56) Az (55) szerint $T_1 = T_2 = T_3 = T(ABC)$.

(57) Meghúzzuk az AC átlót, a $DAC\Delta$-ben és a $BAC\Delta$-ben alkalmazzuk (20)-at.

$T_1 = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot T(DAC)$ és $T_3 = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot T(BAC)$ és összegezve $T_1 + T_3 =$ $= \frac{k}{(k+1)^2} \cdot T(ABCD)$. Hasonlóan $T_2 + T_4 = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot T(ABCD)$;

$T = T(ABCD) - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$.

(58) Meghúzzuk a BD átlót, a (20) alapján $T_1 = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{1}{1-k} \cdot T(ABD)$ és $T_3 = \frac{k}{1-k} \cdot \frac{1}{1-k}T(CBD)$. Összegezve: $T_1 + T_3 = \frac{k}{(1-k)^2}T$;

$T(A'B'C'D') = T + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

(59) $\frac{T_1}{T(PAC)} = \frac{BA'}{A'C} = p$; $\frac{T_1}{T(PBC)} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{q}$, továbbá $T(ABC) = T_1 + T(PBC) +$ $+ T(PCA)$.

(60) Az (59) alapján, felírva annak analógjait is: $T(PAB) = \frac{p}{pq+p+1} \cdot T(ABC)$, $T(QBC) = \frac{q}{qr+q+1}T(ABC)$, $T(RCA) = \frac{r}{rp+r+1} \cdot T(ABC)$.