Tippek, trükkök, ötletek határozatlan integrálok kiszámolásához

I. rész

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A XII. osztályos matematikai analízis egyik legfontosabb feladata az, hogy a tanulók tudjanak helyesen integrálokat számolni. Ez azonban nem is annyira könnyű feladat, hiszen a primitív számolás nagyon sokszínű és változatos. A jelenlegi tankönyvek sok anyagrészt igen átfogóan tárgyalnak, mint például a racionális törtek integrálását, a parciális integrálást, vagy a változócsere módszereit. Mindemellett azonban néhány támpontot szeretnék nyújtani azon tanulóknak, akik az útjuk kezdetén vannak, és most ismerkednek az integrálszámolás rejtelmeivel. Ezt a dolgozatot amolyan „kedvcsinálónak" szántam. Ebben az első részben a határozatlan integrálok számolásáról írok, a következőben pedig a határozott integrálok számolásáról. A két dolgozat egyike sem törekedik teljességre semmilyen szempontból sem, csupán módszertani segítséget szeretnék nyújtani az érdeklődő Olvasónak.

A dolgozat **mottója**: *tanulj meg jelekből olvasni!*

Ez azért fontos, mert ha a kiszámítandó integrált jól szemügyre vesszük, minden részletet, összefüggést, kapcsolatot észreveszünk, akkor ez már „árulkodik" a kiszámolási módjáról, vagyis a megoldás kezdetéről és a menetéről is.

Mindenek előtt azonban jegyezzük meg, hogy nagy fontossággal bírnak a következők:

1) Az elemi függvények deriváltjainak a részletes és pontos ismerete nélkül, nem lehet belevágni az integrál számolásba! Továbbá jó tudni, az összetett függvények deriválási szabályait, de itt tulajdonképpen elég csak egyetlen képletet megjegyezni, a következőt: $\boxed{\left(f(g(x))\right)' = g'(x)\cdot f'(g(x))}$. Ha az elemi függvények deriváltja jól megy, akkor ezen képlet segítségével azonnal megkaphatjuk bármelyik összetett függvény deriváltját! Így nem kell azokat mind megtanulni! Szükséges ismerni a deriválható függvényekkel végezhető fontosabb műveleteket:

   a) $\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$ b) $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$

   c) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

   d) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ e) $\left(f^n(x)\right)' = n\cdot f'(x)\cdot f^{n-1}(x)$

2) Nagyon megkönnyíti a munkánkat, ha jól értjük a differenciálási műveletet: ennek az értelmezése $\boxed{d(f(x)) = f'(x)dx}$. Mivel a differenciálást a derivált segítségével értelmezzük, ezért az a) - e) tulajdonságok a differenciálás esetén is igazak.
   Ellenben kihangsúlyoznánk, hogy a differenciál értelmezése nagy fontossággal bír a változó csere (helyettesítési módszer) alkalmazásánál és jobb megértésénél, ahol javunkra válik, ha ilyesmiket észreveszünk, mint például:

$\cos x dx = d(\sin x)$, $\sin x dx = -d(\cos x)$, $x dx = \frac{1}{2}d(x^2)$ vagy éppen $x dx = \frac{1}{2}d(x^2 + c)$

ahol c tetszőleges állandó, $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\left(\sqrt{x}\right)$, $\frac{1}{x}dx = d\left(\ln x\right)$ stb. Mint említettük, ennek nagy hasznát vesszük a változócsere leegyszerűsítésében, mint például:

Az $I = \int tgx dx$ „klasszikus" kiszámolása gyakran így történik: $I = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ és most legyen $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ tehát $I = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| + C$. De nézzük csak, hogy mennyivel természetesebb és áttekinthetőbb a következő:

$I = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$. Ennek mintájára még két példa:

$I = \int \cos^3 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$, vagy

$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C$

3) Az elemi függvények határozatlan integráljait (primitívjeit) is részletesen, pontosan és gyorsan kell tudni! Ezek nélkül a továbbiakban nem tudunk haladni! Szükséges ismerni a primítiválható függvényekkel végezhető fontosabb műveleteket:
   a) $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ b) $\int \left(k \cdot f(x) \right) dx = k \cdot \int f(x)dx$
4) Tisztába kell lenni egy $f(x)$ függvény $F(x)$ primitív függvényének az értelmezésével, miszerint $\boxed{F'(x) = f(x)}$ amit határozatlan integrállal így írunk: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$
5) Nélkülözhetetlen a következő képlet: $\boxed{\int dx = x + C}$ és így $\int a dx = a\int dx = ax + C$ hiszen az integrálás és a differenciálás egymásnak fordított művelete!

   Kezdjük talán a leg egyszerűbbel ötlettel:

1. Ha az integrandus alatti kifejezés pontos derivált: $\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C}$

Amilyen egyszerű ez a ténymegállapítás, éppen olyan kemény dió is lehet, ha rejtettebb formában jelenik meg, főleg ha az $f(x)$ függvény valamilyen összetettebb függvény. Különösen érdemes ráfigyelni a következő helyzetekre:
$\int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \right) dx = \int \left(f(x) \cdot g(x) \right)' dx = f(x)g(x) + C$ vagy

$= \int \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}dx = \int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$ vagy éppen más helyzet.

Nézzünk csak néhány példát:

1.1) $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx = \sqrt{x^2+1} + C$,

1.2) $I = \int (\sin x + x\cos x)dx = \int (x\sin x)' dx = x\sin x + C$ vagy ennél álcázottabb:

1.3) $I=\int\frac{(x-1)e^x}{x^2}Dx=\int\frac{e^x x-e^x}{x^2}dx=\int\left(\frac{e^x}{x}\right)'dx=\frac{e^x}{x}+C$. Vagy egy jóval nehezebb:

1.4) $I=\int\left(\frac{x}{\cos x+x\sin x}\right)^2dx=\int\left(\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}\right)'dx=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}+C$

2. Ha az integrandus közvetlen (direkt integrálható) elemi függvényekből áll:

Ezek a közvetlen képletek alapján megoldható feladatok, semmi nehézség nincs ebben, alkalmazzuk a 3) alatti a) és b) tulajdonságokat, például:

$$I=\int\left(2x^2-3e^x+\sin x+2\right)dx=2\int x^2dx-3\int e^xdx+\int\sin xdx+2\int dx=2\frac{x^3}{3}-3e^x+\cos x+2x+C$$

3. Ha az integrandus csak $x^m,\frac{1}{x^n},\sqrt[p]{x^q},\frac{1}{\sqrt[r]{x^s}}$ alakú tagokat tartalmaz:

Ilyenkor figyelembe vesszük, hogy $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ valamint $\sqrt[p]{x^q}=x^{\frac{q}{p}}$ és $\frac{1}{\sqrt[r]{x^s}}=x^{-\frac{s}{r}}$. Példa:

$$I=\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-3}dx+3\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C \ .$$

4. Ha az integrandus nem integrálható közvetlenül, csak közvetve:

Ilyenkor a feladat egyszerű módosításával visszavezetjük a feladatot közvetlen integrálható feladatra. A módszer kapcsán három lehetőséget említünk meg:

a) A nevező egyetlen kifejezésből (tagból) áll, és a számláló minden tagját osztjuk ezzel: például

4.1) $I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx+2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$,

4.2) $I=\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{\sqrt{x^4+\frac{1}{x^4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{x^5}dx=\int\frac{x^2+1}{x^5}dx=$

$$=\int\frac{x^2}{x^5}dx+\int\frac{1}{x^5}dx=\int x^{-3}dx+\int x^{-5}dx=\frac{x^{-2}}{2}+\frac{x^{-4}}{4}+C=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+C$$, más példa

4.3) $I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}dx+\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}dx=$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\arcsin x+arcshx+C \ .$$

b) A számlálót és a nevezőt is megszorozzuk ugyanazzal a kifejezéssel, hogy így direkt integrálható legyen: például 4.4)

$$I=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\int\frac{dy}{y^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

4.4) $I=\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{xdx}{x^4+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)d(x^2)=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\ln x^2-\ln(x^2+1)\right)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+C\ .$$

c) A számlálóban hozzáadással és kivonással kialakítjuk a nevezőt (teveszabály):

4.5) $I=\int\frac{-2x^2}{x^2+1}=-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=-2\int 1dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx=-2x+2arctgx+C$

4.6) $I=\int\frac{x^3}{x+3}dx=\int\frac{x^3+3x^2-3x^2}{x+3}dx=\int x^2dx-3\int\frac{x^2+3x-3x}{x+3}dx=\frac{x^3}{3}-\int xdx+9\int\frac{x}{x+3}dx=$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+9\int\frac{x+3-3}{x+3}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+9\int dx-27\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+9x-27\ln(x+3)+C$$

4.7) $I=\int\frac{1+x^4}{1+x^6}dx=\int\frac{1-x^2+x^4}{1+x^6}dx+\int\frac{x^2}{1+x^6}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{1+\left(x^3\right)^2}dx=$

$$=arctgx+\frac{1}{3}arctgx^3+C\ .$$

5. A társintegrál módszere:

A módszernek a neve is mutatja, hogy ha van egy kiszámítandó integrálunk, „segítségül hívhatunk” egy másik integrált, és ha sikerül felírni *a két integrál között két összefüggést*, akkor kétismeretlenes egyenletrendszert kaphatunk, és ezt megoldva, megkapjuk a keresett integrált. Nézzünk is egy példát:

Ha $I=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ ahol $a,b\in\mathbb{R}^*$ akkor ésszerűnek tűnik, ha társintegrálnak választjuk a $J=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx$. Könnyen látható, hogy $bI+aJ=\int dx=x$ (i). Továbbá $aI-bJ=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=\ln\left|a\sin x+b\cos x\right|$ (ii).

Ha most megoldjuk az (i) és (ii) adta egyenlet-rendszert azt kapjuk, hogy $I=\frac{a\ln\left|a\sin x+b\cos x\right|+bx}{a^2+b^2}+C$.

Bizonyára sokan hiányolják, hogy miért is nincs integrálási módszer az $\int u(x)v(x)dx$ elvégzésére? Pedig van, csak *nem írható fel*, hogy $\int u(x)v(x)dx=\int u(x)dx\cdot\int v(x)dx$ mint ahogyan az összeg vagy különbség esetén tettük.

A szorzatok integrálására találták ki mind a parciális integrálást, mint a változócsere I. módszerét! Előbb nézzük a parciális integrálás módszerét!

6. Szorzatfüggvények integrálása parciális integrálással:

A parciális integrálás képlete: $\boxed{\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$. Ez a deriválható függvények c) tulajdonsága alapján azonnal adódik. A képletet azért nevezik „parciális” integrálási módszernek, mert ezzel nem biztos, hogy megkaptuk az eredeti szorzat primitív függvényét, hanem helyette egy másik integrált kaptunk, tehát a feladatot úgymond „részlegesen” (parciálisan) oldottuk meg. Ellenben ha a feladat elején „jól választjuk meg” a két függvényt, akkor az utóbbi integrál már könnyebb mint az eredeti, így egy vagy több lépésben kiszámolható.

Az eredeti integrálunk tehát egy $\int u(x)v(x)dx$ alakú integrál, ahol mi kell célszerűen megválasszuk az $f(x)$ és $g'(x)$ függvényeket úgy, hogy $u(x)v(x) = f(x)g'(x)$ legyen. A továbbiakban látni fogjuk, hogy vannak „jó” és „rossz” választások! Nézzünk néhány feladatot:

6.1) $I = \int x \cdot \sin x dx$ esetén, ha $g'(x) = x$ lenne, akkor $g(x) = \frac{x^2}{2}$ és így a kapott $\int x^2 \sin x dx$ nem egyszerűbb hanem bonyolultabb mint az eredeti integrál, tehát ez rossz választás.

Legyen tehát $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ és $g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ tehát $I = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$.

6.2) $I = \int x \cdot \ln x dx$ setén, ha megint $f(x) = x$ lenne, akkor $g'(x) = \ln x \Rightarrow g(x) = \int \ln x dx$ adódna, ami nem integrálható direkt. Tehát muszáj $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$ tehát $I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

6.3) $I = \int e^x \sin x dx$ esetén könnyen belátható, hogy bármelyik választás megfelelő. Legyen hát $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ és $g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$ tehát $I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + J$ (1). Könnyen belátható, hogy még egy parciális integrálás az eredeti I integrálhoz vezet, így $I-\text{ben}$ egy egyenletet kapunk, ahonnan kiszámítható az I integrál. Ezúttal is legyen $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ és $g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$ tehát $J = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$ (2).

Ha most a (2) összefüggést beírjuk az (1) összefüggésbe azt kapjuk, hogy $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ vagyis $2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

6.4) Az $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ esetén legyen $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}}$ és $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$ így hát felírható, hogy $I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$ és mivel $\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$ ezért az $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$ elsőrendű rekurziós összefüggés adódik $\forall n \in \mathbb{N}$, és $I_0 = x$.

Megjegyzés: A parciális integrálás egy azonnali alkalmazása a következő:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektív, deriválható és deriválható inverzzel rendelkező függvény, akkor

$\boxed{\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)}$ ahol F az f függvény primitív függvénye!

6.5) Számítsuk ki: $I = \int \arccos x dx$ **.** Mivel $f^{-1}(x) = \arccos x$**,** $f(x) = \cos x$**,** $F(x) = \sin x$ az előző összefüggés alapján $I = x\arccos x - \sin(\arccos x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

A bemutatott összefüggés nagyon hatékony, ugyanis bármely inverz függvény integrálja kiszámítható ezzel!

A továbbiakban a változó csere (helyettesítés) módszeréről írunk.

7. Szorzatfüggvények integrálása I. változócsere módszerével:

Ebben az esetben egy $\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C}$ alakú integrállal találjuk szembe magunkat. Tehát az integrál alatt ezúttal is egy szorzatfüggvény van, azzal a sajátossággal, hogy a szorzat egyik tagja a másik tagnak (vagy annak egy részének) éppen a deriváltja. Ekkor a $g(x) = t \Rightarrow g'(x)dx = dt$ változócserét eszközöljük.

Az előző helyzetnek sok sajátos esete is van, nézzünk ezek közül néhányat: $I = \int g(x) \cdot g'(x)dx = \int g(x)d(g(x)) = \frac{g^2(x)}{2} + C$ vagy $I = \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{d(g(x))}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

vagy $I = \int g^n(x)g'(x)dx = \int g^n(x)d(g(x)) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$, stb. Nézzünk néhány példát is:

7.1) $I = \int x(3x^2+1)^3 dx = \frac{1}{3}\int (3x^2+1)^3 d(3x^2+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x^2+1)^4}{4} + C$,

7.2) $I = \int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$,

7.3) $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}d(\sin x) = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int d(\sin x) =$

$= \frac{1}{\sin x} - \sin x + C$

7.4) $I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1+\cos^2 x}} = 2\int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx = 2\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{2-\sin^2 x}} =$

$= 2arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$. Keressünk rekurziós összefüggést, a következő integrál esetén!

7.5) $I_n = \int tg^n x dx = \int tg^{n-2}x \cdot tg^2 x dx = \int tg^{n-2}x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tg^{n-2}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx - I_{n-2}$. Tehát

$I_n = \int tg^{n-2}x d(tgx) - I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}, \forall n > 1$ és $I_0 = x, I_1 = -\ln|x|$.

8. A parciálás integrálás és a változócsere kombinált módszere:

Ahogy a módszer neve is mutatja, együtt alkalmazzuk a parciális integrálást és a változócserét is, persze valamilyen logikus sorrendben. Nézzünk a következő példát:

$$I=\int\frac{2x^2+x}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\int x\frac{\left(1-x-x^2\right)'}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x-x^2}+\int\sqrt{1-x-x^2}dx=-x\sqrt{1-x-x^2}+J$$

Továbbá $J=\int\sqrt{1-x-x^2 1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{4-4x-4x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-(2x+1)^2}dx$. Így

$$K=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}dx-\int x\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}-L$$

és ez utóbbi integrált parciálisan számítjuk ki: $L=-\int x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'dx=$

$=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+K$ ezért $2L=a^2\arcsin\frac{x}{a}-x\sqrt{a^2-x^2}$ így már könnyűszerrel kiszámíthatjuk a J majd az I integrált.

9. Több módszer összetett alkalmazása:

Egy olyan példát mutatunk be, amikor a változócsere I. és II. módszerét is, valamint a számláló-nevező beszorzását meg a „teveszabályt” is alkalmazzuk. Ha $I=\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx$ akkor legyen

$\sin x=t^2\Rightarrow\cos xdx=2tdt$ így $I=\int\frac{\cos x\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x\sqrt{\sin x}}{1-\sin^2 x}dx=$

$$=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2t-2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=-2\sin x-2\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+C$$

Végezetül megjegyezzük, hogy sehol sem írtuk ki az integrálok értelmezési tartományát, nem mintha ez nem lenne fontos, hanem azért, hogy takarékoskodjunk a hellyel. De ennek az elvégzését az érdeklődő Olvasó könnyűszerrel megteheti.

Befejezésül egy módszertani kérdésre szeretnénk kitérni. Több alkalommal több diákom is megkérdezte: honnan lehet látni, hogy mikor lehet (kell) parciálisan integrálni, és mikor változócserével? Az alábbiakban erre fogunk válaszolni!

Ismételten megerősítjük, hogy *mind a két esetben* egy $\int u(x)v(x)dx$ alakú szorzat -függvény integrálásáról van szó!

1) Akkor használjuk a változócsere I. módszerét, ha a szorzat egyik tagja, *a másik tagnak vagy annak egy részének a deriváltja*, például: az $I=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$ esetén, $x=(x^2+1)'$ ezért a változócserét alkalmazzuk, $x^2+1=t$ választással. Vagy $I=\int\cos x\cdot e^{\sin x}dx$ esetén $\cos x=(\sin x)'$ ezért a $\sin x=t$ változócserét alkalmazzuk.
2) Akkor használjuk a parciális integrálást, ha a szorzat két tagja közül *egyik sem deriváltja a másiknak, vagy annak egy részének*, például: $I=\int x\sin xdx$ vagy $I=\int e^x\sin xdx$, stb. Itt a szorzatot alkotó két függvénynek úgymond „semmi köze” egymáshoz.