

Tippek, trükkök, ötletek határozott integrálok kiszámolásához

II. rész

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Már a dolgozat elején megjegyezzük, hogy a határozatlan integrálok számolásánál bemutatott összes módszer érvényes marad a határozott integrálok esetén is, hiszen ebben az esetben érvényes az $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ú.n. Newton -Leibnitz képlet (ahol F az f függvény primitív függvénye).

Ebben a dolgozatban inkább arra térünk ki, hogy mit is hoz újat a határozott integrálok számolása, viszonyítva a határozatlan integrálokhoz? Először is vegyük észre, hogy míg a határozatlan integrál egy függvény, addig a határozott integrál egy szám, méghozzá területet jelent. És éppen abból a különbségből adódik az, hogy egy határozott integrált úgy is ki lehet számolni, hogy *nem határozzuk meg a primitív függvényét!* Ezt legtöbbször jól megválasztott változócserekel valósítjuk meg. A továbbiakban ilyen feladatokat fogunk bemutatni!

Megjegyezzük, hogy ezúttal sem törekszünk teljességre semmilyen szempontból, csupán hasznos ötleteket és módszereket gyűjtöttünk össze!

1. Integrálok számolása intervallumokon:

Ismert, hogy ha $c \in (a, b)$ akkor $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Ezt kiváltképpen akkor alkalmazzuk, amikor az f függvény abszolút értéket, egészrészt tartalmaz, vagy több képlettel van értelmezve. Nézzük is a példákat:

$$1.1) \quad I = \int_0^1 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x)dx = \frac{1}{2}$$

1.2) Ha $I = \int_0^n \frac{1}{2^{[x]}} dx, n \in \mathbb{N}$ akkor ismert, hogy $[x] = k \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$ így felírható, hogy:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2^0} dx + \int_1^2 \frac{1}{2^1} dx + \int_2^3 \frac{1}{2^2} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{2^{n-1}} dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2. Páratlan függvények integrálja:

Ismert tulajdonság, hogy ha $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ akkor $\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ esetén.

$$2.1) \quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \text{ esetén ha } f(x) = \ln \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \text{ akkor}$$

$$f(-x) = \ln \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \ln \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)^{-1} = -\ln \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) = -f(x) \text{ vagyis a függvény}$$

páratlan, ezért $I = 0$.

2.2) $I = \int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$ esetén ha $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$ akkor $f(x) = \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$ így ha az

integrálban az $y = x - 2$ változócsereát végezzük, akkor $I = \int_{-1}^1 \frac{y}{y^2+1} dy$ adódik ahol

$g(y) = \frac{y}{y^2+1}$ esetén $g(-y) = -g(y)$ ami azt jelenti, hogy $I = 0$.

2.3) $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ esetén igazoljuk, hogy $I_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Valóban, az

$I_{2n} = \int_0^\pi \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$ integrálban legyen $x = \frac{\pi}{2} + y \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és továbbá

$\frac{\sin(2nx)}{\sin x} = \frac{\sin(n\pi + 2y)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} = \frac{\sin(n\pi)\cos(2ny) + \cos(n\pi)\sin(2ny)}{\cos y} = (-1)^n \frac{\sin(2ny)}{\cos y}$ tehát

$I = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2ny)}{\cos y} dy = 0$ hiszen az integrandus alatti függvény páratlan.

3. Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet segítségével kiszámítható integrálok:

Vannak olyan feladatok, ahol jól választott változócsereával, többek között, visszakaphatjuk az kiszámítandó integrált, és ebből kifolyólag elsőfokú egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Ez

nagyon gyakran előfordul ha az integrál korlátok 0 és $\frac{\pi}{2}$ (de lehet más is) továbbá az

integrandus alatt jelen van a $\sin x$ és $\cos x$ függvények, amelyekre tudjuk, hogy

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ illetve $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Nézzünk egy azonnali alkalmazást:

3.1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + \cos x) dx$ esetén végezzük el az $x = \frac{\pi}{2} - y$ változócsereát így azt kapjuk,

hogy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)(\sin y + \cos y) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y + \cos y) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\sin y + \cos y) dx$ tehát azt

kaptuk, hogy $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx - I$ tehát $I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \frac{\pi}{2}$.

3.2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ esetén is végezzük el az $x = \frac{\pi}{2} - y$ változócsereát így azt kapjuk,

hogy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y + \cos y}{1 + \sin y + \cos y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 y + \cos y}{1 + \sin y + \cos y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin y + \cos y - \sin^2 y - \sin y}{1 + \sin y + \cos y} dy$

ahonnan azonnal adódik, hogy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dy - I$ vagyis $I = \frac{\pi}{4}$.

3.3) Számítsuk ki: $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} dx$. Legyen $x = \frac{1-t}{1+t}$ így $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-t}{1+t}}{1+t} dt =$
 $= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} t}{1+t} dt = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

4. Társintegrálok módszere:

Ezt a megoldási módszer a határozatlan integrálok esetén is bemutattuk. Itt is alkalmazható akár úgy, hogy nem használunk változócsere, de főképp úgy, hogy *változócsere használunk*.

4.1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$ esetén kiaknázuk azt a tényt, hogy határozott integrálról van szó,

tehát elvégezzük az $x = \frac{\pi}{2} - y$ változócsere és ebből az adódik, hogy

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = J \text{ és } 2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ ami azt}$$

eredményezi, hogy $I = \frac{\pi}{4}$.

4.2) Ha $f : [0, b-a] \rightarrow [0, \infty)$ folytonos és $a < b$ akkor mennyi az $I = \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)} dx$

integrál? Ésszerűnek látszik, hogy a társintegrál $J = \int_a^b \frac{f(b-x)}{f(x-a) + f(b-x)} dx$ legyen, mert így

$$I + J = \int_a^b 1 dx = b - a. \text{ Továbbá az } I \text{ -ben legyen } x - a = b - t \text{ így } I = \int_a^b \frac{f(b-t)}{f(b-t) + f(t-a)} dt = J$$

Tehát $I = J = \frac{b-a}{2}$.

5. A „Királyi szabály” (angolul a szakirodalomban „King rule” vagy „King property”):

Ezzel az egyszerű de nagyszerű szabállyal általánosítható az előző két módszer. A szabály a következő:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx. \text{ Ezt azonnal ellenőrizhetjük az } y = a+b-x \text{ változócserevel. Amilyen}$$

egyszerű, olyan nagyszerű az alkalmazása. Nézzünk néhány egyszerű példát:

5.1) Kiszámítandó: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \sqrt{2} x} dx$. A királyi szabály szerint $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx =$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \sqrt{2} x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{2} x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{2} x}{\operatorname{tg} \sqrt{2} x + 1} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{2} x + 1} dx = \frac{\pi}{6} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$$

5.2) Kiszámítandó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + t g x) dx$. Felírható, hogy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[1 + t g \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right] dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{1 - t g t}{1 + t g t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1 + t g t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + t g t) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

5.3) Kiszámítandó: $I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$. Itt nem célravezető a királyi szabály azonnali alkalmazása,

hanem előbb az $x = t g y$ változócsere végezzük, így azt kapjuk, hogy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + t g y) dy = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

6. Sajátos, egyedi módszerek:

Számos olyan feladat adódhat, amelyekre nincsenek típusmódszerek, ezeket esetenként kell orvosolni. Nézzünk néhány ilyen feladatot is:

6.1) Ha $I = \int_{-x}^x \frac{e^t \cos t}{1 + e^t} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor értelmezzük a következő függvényt

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t \cos t}{1 + e^t} dt. \text{ Könnyen belátható, hogy } F'(x) = \frac{e^x \cos x}{1 + e^x} + \frac{e^{-x} \cos(-x)}{1 + e^{-x}} = \cos x. \text{ Tehát}$$

$$I = F(x) = \sin x + C, \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

6.2) Ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ bijektív függvény, akkor az $I = \int_0^2 f^{-1}(t) dt$ integrál értéke mivel egyenlő? Mivel $f^{-1}(f(x)) = x$, ezért végezzük el a $t = f(x)$ változócsere, és kapjuk, hogy

$$I = \int_0^1 x f'(x) dx = \int_0^1 x(3x^2 + 1) dx = \frac{5}{4}.$$

6.3) Számítsuk ki: $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. Az $1-x$ és $1+x$ láttán könnyen eszünkbe juthatnak az

$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$ és $1 + \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$ képletek. Ez arra ösztönözhet minket, hogy elvégezzük

az $x = \cos t$ változócsere. Ekkor azt kapjuk, hogy $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{2} dt = \frac{1}{2} (\pi - 2)$.

6.4) Számítsuk ki: $I = \int_{-2021}^{2021} \frac{x^{2022}}{1 + 2023^x} dx$. Legyen $x = -y$ így $I = \int_{-2021}^{2021} \frac{y^{2022}}{1 + 2023^{-y}} dy =$

$$= \int_{-2021}^{2021} \frac{2023^y \cdot y^{2022}}{1 + 2023^y} dy \text{ ezért } 2I = \int_{-2021}^{2021} x^{2022} \left(\frac{1}{1 + 2023^x} + \frac{2023^x}{1 + 2023^x} \right) dx = \int_{-2021}^{2021} x^{2022} dx = 2021^{2022}$$

6.5) Számítsuk ki: $I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$. Nagyon hasznos a következő változócsere:

$x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$ mert így $x - a = (b - a) \sin^2 t$ és $b - x = (b - a) \cos^2 t$ tehát

$$I = (b - a) \int_a^b \sin t \cos t = \frac{b - a}{2} \int_a^b \sin 2t d(2t) = \frac{(b - a)^2}{8}.$$

7. Az $I = \int_a^b x f(x) dx$ alakú integrál, ahol f folytonos a $[a, b]$ intervallumon ha $f(a + b - x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Igazolni fogjuk, hogy $I = \int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx = (a + b) \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$ (*). Először is végezzük

el az $a + b - x = t$ változócsere, ekkor azt kapjuk, hogy $I = (a + b) \int_a^b f(x) dx - I$ vagyis

$$I = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx. \text{ Továbbá } \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \text{ és a második integrálban újra}$$

elvégezzük az $a + b - x = t$ változócsere, és azt kapjuk, hogy $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$ és ezzel igazoltuk a (*) egyenlet utolsó egyenlőségét is.

A bemutatott (*) összefüggésnek nagyon sok további alkalmazása van, nézzünk néhányat:

7.1) $\int_0^{\pi} x g(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} g(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x) dx$ ahol $g(x)$ folytonos a $[0, 1]$

intervallumon. Valóban ha a (*) egyenlőségekben $f(x) = g(\sin x)$, $a = \pi, b = 0$ akkor mivel $\sin(\pi - x) = \sin x$ ezért $f(a + b - x) = f(x)$ teljesül.

7.1.1) Azonnali alkalmazás: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 2^2}$ ahonnan

$$I = \frac{\pi}{8} \left[\ln \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} \ln 3$$

7.2) $\int_0^{\pi} x g(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} g(\cos x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos x) dx$ ahol $g(x)$ folytonos a $[-1, 1]$

intervallumon és $g(-y) = g(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Ugyancsak a (*) egyenlőségsort alkalmazzuk az $f(x) = g(\cos x)$ függvényre, de itt a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ miatt az $f(a + b - x) = f(x)$ teljesüléséhez szükségünk van a g függvény párosságára.

7.2.1) Azonnali alkalmazás: $I = \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

7.3) Ha f folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon, és $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ akkor

$I = \int_0^{2\pi} x^2 f(\sin x) dx = -4\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$. Valóban, ha elvégezzük az $x = 2\pi - y$ változócsereét,

akkor számolás után azt kapjuk, hogy $I = -4\pi \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx$. Ha most elvégezzük az

$x = \pi - y$ változócsereét, akkor számolás után éppen a bizonyítandó eredményt kapjuk.

7.3.1) Alkalmazás: $I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin^3 x dx = -4\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = 4\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \frac{8\pi^2}{3}$.

7.4) Ha f, g folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon és $g(-y) = g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$, akkor igaz, hogy

$\int_0^{\pi} x f(\sin x) g(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$. Valóban, ha elvégezzük az $x = \pi - t$

változócsereét, a $\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x$ és $f(y) = y, g(y) = \frac{1}{1 + y^2}$,

$g(-y) = g(y)$ alapján éppen a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk.

7.4.1) Alkalmazás: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x) + C$

8. Inverz függvényrel kapcsolatos integrál:

Igazolni fogjuk, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ szigorúan növekvő, szürjektív és folytonos függvény,

akkor $\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f^{-1}(y) dy = bd - ac$. Valóban, mivel f növekvő és szürjektív, ezért

$f(a) = c, f(b) = d$. A második integrálban az $y = f(t)$ változócsereét végezzük, és azt kapjuk,

hogy $\int_c^d f^{-1}(y) dy = \int_a^b t f'(t) dt = [t f(t)]_a^b - \int_a^b f(x) dx = bc - ad - \int_a^b f(x) dx$.

8.1) Alkalmazás: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi^2}{8}$. Mivel $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$, és

$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ szigorúan növekvő, szürjektív és folytonos, ezért alkalmazható ez előző

tulajdonság.

8.2) Ha $g(x)$ az $f(x) = x + e^x$ függvény inverze, akkor mennyi az $I = \int_1^{1+e} g(y) dy$ integrál?

A 7. eredménye alapján $\int_0^1 (x + e^x) dx + \int_1^{1+e} g(y) dy = 1 + e$, ahonnan $I = \frac{3}{2}$.

9. A Feynman trükk (Leibnitz szabály):

Ennek a rendkívül hatékony technikának a lényegét feladatokon keresztül szemléltetjük.

9.1) Kiszámítandó: $I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ ahol $a, b \in \mathbb{R}_+$ rögzített számok. A feladat megoldása

céljából tekintsük az $I(s) = \int_0^1 \frac{x^s - x^b}{\ln x} dx$ segédfüggvényt. Alkalmazzuk a Leibnitz szabályt,

miszerint: $\frac{d}{ds} I(s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{x^s - x^b}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{d}{ds} \frac{x^s - x^b}{\ln x} dx$ vagyis $I'(s) = \int_0^1 \frac{x^s \ln x}{\ln x} dx = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1}$

tehát $I(s) = \ln|s+1| + C$. De vegyük észre, hogy $I(b) = 0$ ezért $C = -\ln|b+1|$ vagyis

$$I(s) = \ln \left| \frac{s+1}{b+1} \right| \text{ tehát } I = I(a) = \ln \left| \frac{a+1}{b+1} \right|.$$

9.2) Számítsuk ki: $I = \int_0^1 (x \ln x)^3 dx$. A feladat megoldása céljából tekintsük az $I(s) = \int_0^1 x^s dx$

segédfüggvényt. Alkalmazzuk a Leibnitz szabályt, miszerint: $I'(s) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (x^s) dx = \int_0^1 x^s \ln x dx$ és

tovább deriválva kapjuk, hogy $I''(s) = \int_0^1 x^s \ln^2 x dx$ és végül $I'''(s) = \int_0^1 x^s \ln^3 x dx$. Belátható,

hogy $I = I'''(3)$. Másfelől $I(s) = \frac{1}{s+1}$ ahonnan $I'''(s) = \frac{3!}{(s+1)^4}$ így hát $I = I'''(3) = \frac{3!}{4^4} = \frac{3}{128}$

Megjegyzés: könnyen belátható, hogy az $I_\alpha = \int_0^1 (x \ln x)^\alpha dx$ integrált is hasonlóan kiszámíthatjuk, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ rögzített szám esetén.

9.3) Számítsuk ki: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$. A segédfüggvény megválasztása nem mindig egyszerű dolog.

Most éppen az $I(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(s \cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$ segédfüggvény lesz jó. Ekkor $I'(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(s \cdot \operatorname{tg} x)^2 + 1} dx =$

$$= \frac{\pi}{2(s+1)}. \text{ Tehát } I(s) = \frac{\pi}{2} \ln(s+1) + C. \text{ De } I(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ és } I = I(1) = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Szakirodalom

[1] András Szilárd, Csapó Hajnalka, Lukács Andor: Matematika A XII. osztály számára, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2002

[2] A Corduneanu és társai: Culegere de probleme de matematica pentru admiterea in invatamantul superior, Editura Junimea, 1972

[3] Farkas Miklós: Matematika, Tankönyv a XII. osztály számára, Ábel Kiadó

[4] Gh Siretchi: Calcul diferential si integral, Vol 2., Editura Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti, 1985

[5] Teste grila de matematica, Admitere 2008, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2007

[6] <https://www.cantorsparadise.com/richard-feynmans-integral-trick-e7afae85e25c>

[7]

<https://static1.squarespace.com/static/59471704440243a2a0adc0e0/t/5ce06f9ad7031b00018e7e00/1558212507453/king+property.pdf>