# TÖLTÖGETÉSI FELADATOKRÓL I.

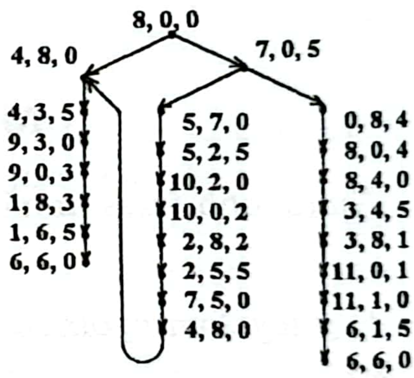
**Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely**

Az *Abacus* 1996. októberi számában a *Lurkó logika* rovat 9. feladata a következő: Egy 6 literes és egy 8 literes kanna tele van tejjel. Van egy üres 11 literes kannánk. Hogyan tudunk töltögetéssel 5 liter tejet kimérni?

Az elkövetkezőkben ilyen jellegű feladatok szemléletes megoldásáról fogok írni.

Állítólag úgy esett, hogy a francia matematikus, *Simon Poisson* még diákkorában megoldott egy hasonló feladatot, és ennek kapcsán annyira megszerette a matematikát, hogy annak szentelte egész életét. A feladat, amelyet gráfok segítségével oldott meg (angolul: graph = rajz), a következő:

,,*Egy embernek 12 pint bora van, és a felét el akarja ajándékozni, de nincs 6 pintes edénye. Két edénye van, az egyik 8, a másik 5 pintes. Hogyan önthet pontosan 6 pint bort a 8 pint űrtartalmú edénybe? Legkevesebb hány átöntés szükséges ehhez?*" (A pint régi francia űrmérték: 1 pint = 0,9 liter.)



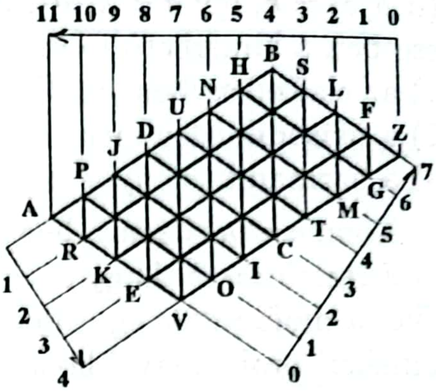

Poisson elkészítette az ábrán látható gráfot. Feltételezte, hogy az első edény 12 pint, a második 8 pint, a harmadik pedig 5 pint űrtartalmú. Az első edényben 12 pint bor van, a másik két edény üres. Ezt az állapotot a gráfon így jelölte: $(12, 0, 0)$. Továbbá a gráf nyilait követve leolvasható, hogy a töltögetések során melyik edényben mennyi folyadék található. Az is leolvasható, hogy a gráf két megoldást is szemléltet. ([1])

A továbbiakban még szemléletesebben oldunk meg ilyen jellegű feladatokat. Azzal a legegyszerűbb esettel kezdjük, amikor az első edény űrtartalma egyenlő a másik két edény űrtartalmának összegével. ([2], [3]) Ez esetben lényegtelen, hogy az első vagy a másik két edény van tele folyadékkal.

**1.1. feladat.** egy 11 literes kanna tele van vízzel. Van egy üres 7 literes és egy üres 4 literes kannánk. Csupán a három kanna segítségével mérjünk ki 1 liter vizet.

Igaz-e, hogy az első kannában bármely 1 és 11 liter közötti, a második kannában bármely 1 és 7 liter közötti, valamint a harmadik kannában bármely 1 és 4 liter közötti (egész liternyi) vízmennyiség kimérhető?

A feladat megoldása céljából készítsük el az ábrán látható, egyenlő oldalú háromszögrácsra szerkesztett paralelogrammát, amelynek $AB = VZ$ oldala 7 egység, az $AV = BZ$ oldala pedig 4 egység.




A szóban forgó három edényt a megfelelő nyilak jelölik. Ezeken ,,beosztásokat" jelöltünk meg, amelyeket úgy kaptunk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszögrács háromszögeinek oldalegyeneseit merőlegesen, a nyilakkal metszettünk. (Ehhez a nyilakat ,,megfelelő" helyzetbe kellett állítani.)

Az $ABZV$ paralelogrammát úgy tekintjük, mint egy biliárdasztalt, amelyen a ,,golyó" az $A$ pontban van, ahonnan rendre a $B$, $C$, $D$, $E$, ..., $V$, $Z$ pontokba — a rácsvonalak mentén — 60°-os szög szerint ,,pattan". (A $B$ pontot, a jelenlegi $V$ pontba is tehettük volna, így az $U$ pont $C$ lenne stb., de a mi esetünkben az a választás ugyanoda vezet, mint az előző).

Könnyen belátható, hogy a három edénnyel való töltögetés során az egyes edények tartalma leolvasható az illető pontnak a három nyilra való merőleges vetítése során. Az egyes edényben levő vízmennyiség — midőn a biliárdgolyó végighalad az $A$-tól a $Z$-ig — a mellékelt táblázatban foglalható össze. Az ábráról leolvasható, hogy a 6. lépésnél (az $F$ pontban) a 11 literes edényben pontosan 1 liter víz lesz.

| | 11 | 7 | 4 |
|---|---|---|---|
| A | 11 | 0 | 0 |
| B | 4 | 7 | 0 |
| C | 4 | 3 | 4 |
| D | 8 | 3 | 0 |
| E | 8 | 0 | 3 |
| F | 1 | 7 | 3 |
| G | 1 | 6 | 4 |
| H | 5 | 6 | 0 |
| I | 5 | 2 | 4 |
| J | 9 | 2 | 0 |
| K | 9 | 0 | 2 |
| L | 2 | 7 | 2 |
| M | 2 | 5 | 4 |
| N | 6 | 5 | 0 |
| O | 6 | 1 | 4 |
| P | 10 | 1 | 0 |
| R | 10 | 0 | 1 |
| S | 3 | 7 | 1 |
| T | 3 | 4 | 4 |
| U | 7 | 4 | 0 |
| V | 7 | 0 | 4 |
| Z | 0 | 7 | 4 |

Továbbá az is leolvasható, hogy a feladat második felében feltett kérdésekre igenlő választ adhatunk.

Az előbbiek alapján a következőket sejthetjük:

Adott $a > b > c$ pozitív egész számok esetén legyen három edényünk: az első $a$ liter űrtartalmú és tele van vízzel, a második $b$, a harmadik $c$ liter űrtartalmú és mindkettő üres, továbbá $a = b + c$.

**1.1. sejtés.** Amennyiben $(b, c) = 1$, úgy a kimérhető folyadékmennyiségek:

1) az első edényben: $1, 2, \ldots, a$ liter;

2) a második edényben: $1, 2, \ldots, b$ liter;

3) a harmadik edényben: $1, 2, \ldots, c$ liter.

**1.2. sejtés.** Amennyiben $(b, c) = k \neq 1$, ezért $a = b + c$ miatt $(a, b, c) = k$, így $a = k \cdot a_1$, $b = k \cdot b_1$, $c = k \cdot c_1$, ahol $(a_1, b_1, c_1) = 1$. Ez esetben a kimérhető folyadékmennyiségek:

1) az első edényben: $k$, $2k$, $\ldots$, $a_1 \cdot k = a$ liter;
2) a második edényben: $k$, $2k$, $\ldots$, $b_1 \cdot k = b$ liter;
3) a harmadik edényben: $k$, $2k$, $\ldots$, $c_1 \cdot k = c$ liter.

Könnyen belátható, hogy az *1.2. sejtés* levezethető az *1.1. sejtés*ből. Feltételezhető, hogy az *1.1. sejtés* bizonyítása kapcsolatban áll az elsőfokú diofantikus egyenlet megoldásával, vagy éppen valamilyen gráfelméleti problémával hozható kapcsolatba.

A sejtéssel kapcsolatos bizonyításokat, megjegyzéseket minden Olvasótól szívesen várunk. Írásaikat a szerkesztőség címére küldhetik.

*(folytatjuk)*

## Felhasznált források


[1] **Ruszev – Ruszeva**, *Matematikai mozaik (62. oldal 25. feladat)*, Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[2] **Nicolae Oprișiv**, *Olimpiada jocurilor raționale (192. oldal 9.4. feladat)*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1984.

[3] **Tuzson Zoltán**, *Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat? Módszertani feladatgyűjtemény aritmetikából (172. oldal 9. példa)*, Magyar Virág Kiadó, Szombathely, 1996.


## Milyen a matematika?

*A matematikában a szépség igen nagy szerepet játszik. ... Érdekes, hogy az eleganciáról nem szokott vita kialakulni, a matematikusok ízlése nagyjából azonos. A matematikában azonban a szépség elválaszthatatlan a célszerűségtől, általában nem nevezünk szépnek egy bizonyítást, amely a célt nem a legrövidebb, legcélravezetőbb úton éri el.*

N. G. Csebotarjev