TÖLTÖGETÉSI FELADATOKRÓL II.

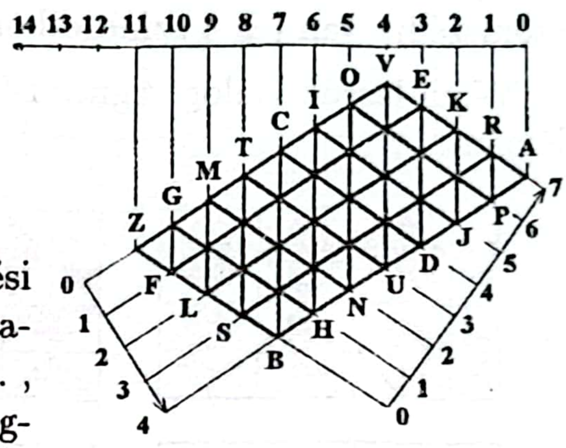
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben olyan esetek tanulmányozásával foglalkozunk, amikor a három kanna közül a legnagyobbik űrtartalma nagyobb, mint a másik két kanna űrtartalmának összege. Ez esetben két problématípust különböztethetünk meg aszerint, hogy a két kisebb űrtartalmú, illetve a legnagyobb űrtartalmú kanna van tele.

Mindkét típusra oldjunk meg egy-egy feladatot.

2.1. feladat. Egy 4 literes és egy 7 literes kanna tele van tejjel. Van egy üres 14 literes kannánk. Igaz-e, hogy töltögetéssel a 14 literes kannában bármely 1 és 14 liter, a 7 literes kannában bármely 1 és 7 liter, valamint a 4 literes kannában bármely 1 és 4 liter közötti (egész liternyi) tejmennyiség kimérhető?

A feladat megválaszolása céljából készítsük el az ábrán látható egyenlő oldalú háromszögrácsra szerkesztett paralelogrammát, melynek két oldala 7 és 4 egység.



Már az ábráról is — a „töltögetési táblázat" nélkül is — könnyen belátható, hogy amíg az A pontból a B, C, ..., Z pontokba eljutunk, addig máris megfogalmazható a kérdéseinkre a válasz:

1) a 14 literes kannában: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 liter;

2) a 7 literes kannában: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 liter;

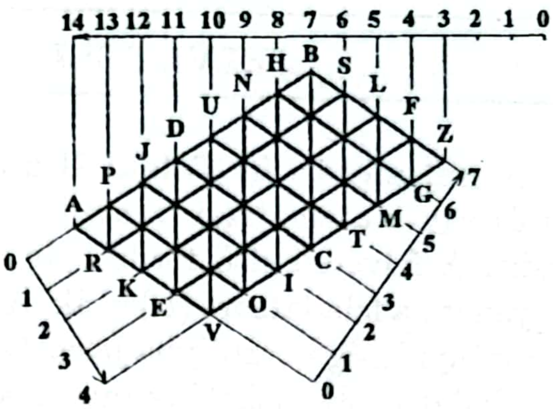
3) a 4 literes kannában: 1, 2, 3, 4 liter folyadékmennyiség mindegyike kimérhető.

A legnagyobb kannában nyilvánvaló, hogy nem mérhető ki 12, 13, 14 liter tej, hiszen a másik két kannában mindössze 11 liter tej van.

Most vizsgáljuk a feladat másik típusát.

2.2. feladat. Egy 14 literes kanna tele van tejjel. Van egy üres 7 literes és egy üres 4 literes kannánk. Igaz-e, hogy töltögetéssel a 14 literes kannában bármely 1 és 14 liter, a 7 literes kannában bármely 1 és 7 liter, valamint a 4 literes kannában bármely 1 és 4 liter közötti (egész liternyi) tejmennyiség kimérhető?

A feladat megválaszolása céljából készítsük el az ábrán látható egyenlő oldalú háromszögrácsra szerkesztett paralelogrammát.



Ez esetben is — a „töltögetési táblázat" nélkül is — leolvasható, hogy amíg sorra bejárjuk az A, B, $C, \dots, V, Z$ pontokat, addig máris megfogalmazható a kérdéseinkre a válasz:

1) a 14 literes kannában: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 liter; 12, 13, 14

2) a 7 literes kannában: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 liter;

3) a 4 literes kannában: 1, 2, 3, 4 liter folyadékmennyiség mindegyike kimérhető.

A 14 literes kannában nem mérhető ki 1 és 2 liter tej, hiszen a másik két edénybe mindössze $7 + 4 = 11$ liter tej fér be a 14 literből.

Jelen esetben is megfogalmazom az általános esetre vonatkozó sejtéseimet:

Adott $a > b > c$ pozitív egész számok esetén legyen három edényünk: az első a, a második b, a harmadik c liter űrtartalmú, továbbá $a > b + c$.

2.1. sejtés. Amennyiben $(a, b, c) = 1$, úgy az egyes edényekben kimérhető folyadékmennyiségek:

1.a) az első edényben: $1, 2, \dots, b + c$ liter, amennyiben ez volt tele.

1.b) az első edényben: $a - b - c, a - b - c + 1, \dots, a$ liter, amennyiben kezdetben a másik két edény volt tele.

2) a második edényben: $1, 2, \dots, b$ liter, mindkét esetben.

3) a harmadik edényben: $1, 2, \dots, c$ liter, mindkét esetben.

2.2. sejtés. Amennyiben $(a, b, c) = k \neq 1$, úgy $a = k \cdot a_1$, $b = k \cdot b_1$, $c = k \cdot c_1$, ahol $(a_1, b_1, c_1) = 1$. Ebben az esetben az egyes edényekben kimérhető folyadékmennyiségek:

1.a) az első edényben: $k, 2k, \dots, (b_1 + c_1) \cdot k = b + c$ liter, amennyiben kezdetben ez az edény volt tele.

1.b) az első edényben: $a - b - c = (a_1 - b_1 - c_1) \cdot k$, $a - b - c = (a_1 - b_1 - c_1 + 1) \cdot k, \dots, a_1 \cdot k$ liter, amennyiben kezdetben a másik két edény volt tele.

2) a második edényben: $k, 2k, \dots, b_1 \cdot k = b$ liter, mindkét esetben.

3) a harmadik edényben: $k, 2k, \dots, c_1 \cdot k = c$ liter, mindkét esetben.

Nem nehéz belátni, hogy a *2.1. sejtés* és a *2.2. sejtés* levezethető az I. rész *1.1. sejtésé*ből. Mindezekkel kapcsolatos írásokat szívesen várunk a lap szerkesztőségének címére. *(folytatjuk)*