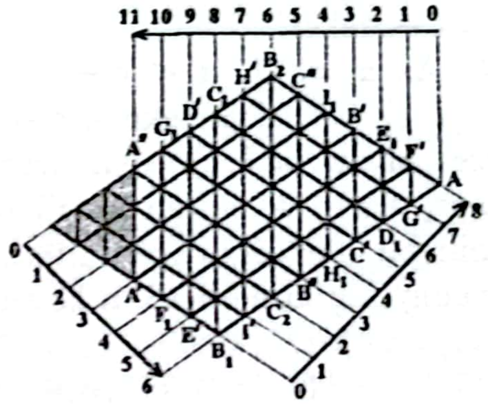
TÖLTÖGETÉSI FELADATOKRÓL III.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a részben olyan esetek tanulmányozásával foglalkozunk, amikor a három kanna közül a legnagyobbik űrtartalma kisebb, mint a másik két kanna űrtartalmának összege. Ez esetben is két problématípust különböztetünk meg aszerint, hogy a két kisebb űrtartalmú, illetve a legnagyobb űrtartalmú kanna van tele. Mindkét típusra megoldunk egy-egy feladatot.

Kezdjük az *I. részben* idézett 9. feladat általánosításával.

3.1. feladat. Egy 6 literes és egy 8 literes kanna tele van tejjel. Van egy üres 11 literes kannánk. Igaz-e, hogy töltögetéssel a 11 literes kannában bármely 1 és 11 liter, a 8 literes kannában bármely 1 és 8 liter, valamint a 6 literes kannában bármely 1 és 6 liter közötti (egész liternyi) tejmennyiség kimérhető?



A feladat megoldása céljából készítsük el a mellékelt ábrát. Belátható, hogy most 3 „indulási pont" van (az A, A' és A''), hiszen úgy is elkezdhetjük a töltögetést, hogy két kisebb űrtartalmú kanna van tele, vagy úgy, hogy az egyik illetve a másik kannából feltöltjük a 11 literes kannát. (Tulajdonképpen egyik „indulási pontból" egy vagy több töltögetéssel „áttérhetünk" a másikba, pl. az A'-ből az A''-be vagy fordítva, stb.)

	11	8	6
A	–	8	6
B_1	8	–	6
C_1	8	6	–
D_1	2	6	6
E_1	2	8	4
F_1	10	–	4
G_1	10	4	–
H_1	4	4	6
I_1	4	8	2

	11	8	6
A'	11	–	3
B'	3	8	3
C'	3	5	6
D'	9	5	4
E'	9	–	5
F'	1	8	5
G'	1	7	6
H'	7	7	–
I'	7	1	6

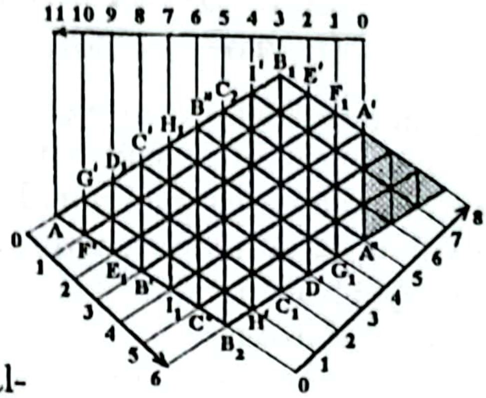
	11	8	6
A	–	8	6
B_2	6	8	–
C_2	6	2	6

	11	8	6
A''	11	3	–
B''	5	3	6
C''	5	8	1

A töltögetési folyamatot ezúttal is jobban áttekinthetjük a mellékelt táblázatokkal, ahonnan arról is meggyőződhetünk, hogy a feladat kérdéseire a válasz pozitív.

3.2. feladat. Egy 11 literes kanna tele van tejjel. Van egy üres 6 literes és egy üres 8 literes kannánk. Igaz-e, hogy töltögetéssel a 11 literes kannában bármely 1 és 11 liter, a 8 literes kannában bármely 1 és 8 liter, valamint a 6 literes kannában bármely 1 és 6 liter közötti (egész liternyi) tejmennyiség kimérhető?

A feladat megoldása céljából készítsük el a mellékelt ábrát. Belátható, hogy ebben az esetben is 3 „indulási pont" van. A töltögetések folyamatát — áttekinthetőbben — a mellékelt táblázatokból is kiolvashatjuk. Azt is láthatjuk, hogy a feladat kérdéseire a válasz ezúttal is pozitív.



	11	8	6
A	11	–	–
B_1	3	8	–
C_1	3	2	6
D_1	9	2	–
E_1	9	–	2
F_1	1	8	2
G_1	1	4	6
H_1	7	4	–
I_1	7	–	4

	11	8	6
A'	–	8	3
B'	8	–	3
C'	8	3	–
D'	2	3	6
E'	2	8	1
F'	10	–	1
G'	10	1	–
H'	4	1	6
I'	4	7	–

	11	8	6
A	11	–	–
B_2	5	–	6
C_2	5	6	–

	11	8	6
A''	–	5	6
B''	6	5	–
C''	6	–	5

Az általánosítási lehetőséget vizsgálva ezúttal sokkal komplexebb helyzettel találjuk szembe magunkat. Ennek ízelítéseként felsorolom a következő ellenőrzött eseteket:

1) Az $a = 11$, $a < b + c$, $a > b > c$, $(a, b, c) = 1$ feltételeknek eleget tevő összes olyan $(a; b; c)$ edényűrtartalom-hármas, amelyek esetén az illető edényben minden lehetséges egész liternyi folyadékmennyiség kimérhető, a következő: $(11; 10; 4)$, $(11; 10; 3)$, $(11; 10; 2)$, $(11; 9; 4)$, $(11; 9; 3)$, $(11; 9; 2)$, $(11; 8; 6)$, $(11; 8; 5)$, $(11; 8; 4)$, $(11; 7; 6)$, $(11; 7; 5)$, ez érdekes módon (?!) pontosan 11 lehetőség.

2) Az $a = 11$, $a < b+c$, $a > b > c$, $(a, b, c) = 1$ feltételeknek eleget tevő $(11; 10; 5)$, $(11; 9; 5)$, $(11; 8; 7)$ esetekben már nem mérhető ki mindegyik egész liternyi folyadékmennyiség.

Sőt, érdemes észrevenni, hogy az 1)-nél felsoroltak esetén a $(11; 8; 6)$ kivételével minden esetben $b + c - a < 3$.

Így a feltételezhetően igaznak bizonyuló sejtések kijelentésénél visszafogottabbak kell legyünk.

Adott $a > b > c$ pozitív egész számok esetén legyen három edényünk: az első a liter űrtartalmú, a második b liter és a harmadik c liter űrtartalmú, továbbá $a < b + c$, s legyen $k = b + c - a$.

3.1. sejtés. Amennyiben $(a, b, c) = 1$ és $k \in \{1, 2\}$, úgy az egyes edényekben kimérhető folyadékmennyiségek:

1) az első edényben: $1, 2, \ldots, a$ liter,

2) a második edényben: $1, 2, \ldots, b$ liter,

3) a harmadik edényben: $1, 2, \ldots, c$ liter, függetlenül attól, hogy kezdetben a legnagyobb űrtartalmú, vagy a másik két edény volt tele.

3.2. sejtés. A $k = 3$ esetben az $a = 4n - 1$, $b = 2n + 2$, $c = 2n$ liter űrtartalmú edényekre is teljesül az előző sejtés 1), 2), 3) következtetése, bármely $n \geq 2$ esetén.

3.3. sejtés. Amennyiben $(a, b, c) = d$ és $d \neq 1$, úgy $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$, $c = d \cdot c_1$, ahol $(a_1, b_1, c_1) = 1$. Ha $k \in \{1, 2\}$, ebben az esetben a kimérhető folyadékmennyiségek:
1) az első edényben: d, $2d$, ..., $a_1 \cdot d = a$ liter,
2) a második edényben: d, $2d$, ..., $b_1 \cdot d = b$ liter,
3) a harmadik edényben: d, $2d$, ..., $c_1 \cdot d = c$ liter, mindkét „töltési" esetben.

Nyitott kérdések:
1) A $k = 3$ esetben léteznek-e más, a *3.2. sejtéstől* eltérő $a > b > c$, $a < b + c$ feltételnek eleget tevő edények, hogy „minden kimérés" lehetséges legyen?
2) Ugyanaz a kérdés tetszőleges $k \geq 4$ pozitív egész szám esetén.
3) Mivel kell a *3.1. sejtést* a $k \in \{1, 2\}$ helyett más feltétellel általánossá tenni?

Jelen esetben is a sejtések és nyitott kérdések megválaszolását szívesen várjuk. Írásaikat a lap szerkesztőségének a címére küldhetik.

A cikksorozat első részében megfogalmazott egyik sejtésnek az igazolását elvégezte és megküldte nekünk *András Szilárd*. Ezt a bizonyítást az *Abacus* egyik őszi számában közöljük.

Az érdeklődő olvasók figyelmébe ajánljuk az alábbi könyveket.

AJÁNLOTT OLVASMÁNYOK

[1] H. S. M. Coxeter – S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat Budapest, 1977, 145–153. oldalak.
[2] Mosonyi Kálmán, *Matematikai játékok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 101–104. oldalak.