Trigonometriai egyenlőtlenségek algebrai bizonyítása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A trigonometrikus egyenlőtlenségek bizonyítására számos lehetőségünk, eszközünk és módszerünk van. Használhatunk trigonometriai képleteket, tételeket, geometriai interpretációkat, vektorgeometriai eljárásokat, a koordináta-geometria eszközeit, komplex számokat, algebrai középarányos egyenlőtlenségeket, vagy éppen a matematikai analízis eszközeit.

A továbbiakban, a trigonometrikus egyenlőtlenségek bizonyítására egy különös és speciális algebrai módszert alkalmazunk, amelynek a neve: dualitási elv.

DUALITÁSI ELV: az a,b,c számok akkor és csakis akkor képezik egy háromszög oldalainak a hosszát, ha léteznek olyan $x,y,z>0$ számok, amelyekre $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ (D_1)

Bizonyítás: Legyenek a,b,c egy háromszög oldalai és $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete. Ekkor az

$$a=(p-b)+(p-c)\,,\ b=(p-a)+(p-c)\,,\ c=(p-a)+(p-b)$$

egyenlőségek miatt az $x=p-a>0,\ y=p-b>0,\ z=p-c>0$ választás megfelelő. Fordítva: az $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{c+a-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}\quad (D_2)$$

és az $x,y,z>0$ feltétel miatt a háromszög egyenlőtlenség alapján a,b,c valóban egy háromszög oldalait képezik. A továbbiakban jelölje a,b,c az ABC háromszög megfelelő oldalait, p a félkerületét, r a beírt kör sugarát, R a köré írt kör sugarát, $r_a,\ r_b,\ r_c$ a megfelelő oldalakhoz írt körök sugarát, $h_a,\ h_b,\ h_c$ a megfelelő magasságok hosszát.

A dualitási (D_1) képletek alapján néhány fontosabb trigonometriai képlet a következőképpen alakul:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$$

$$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

$$R=\frac{abc}{4T}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$r=\frac{T}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$r_a=\frac{T}{p-a}=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x}$$ és analógjai,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$$ és analógjai,

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}$$ és analógjai,

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)}$$ és analógjai,

$$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{2x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}-1=\frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)}$$ és analógjai

$$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}}$$ és analógjai,

$$h_a=\frac{2T}{a}=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}$$ és analógjai.

A továbbiakban, a trigonometriai egyenletek bizonyítása céljából az a dolgunk, hogy az a, b, c, A, B, C háromszög elemeket helyettesítsük az x, y, z pozitív valós számokkal, mert így minden bizonnyal könnyebb lesz a bizonyítandó egyenlőtlenség, hiszen a továbbiakban az $x, y, z > 0$ feltételt sokkal könnyebben lehet használni, mint az $a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b$ illetve az $A + B + C = \pi$ feltételeket. Így várhatóan egy könnyebb feladatot kell bizonyítanunk.

ALKALMAZÁSOK: A következőkben, - a felsorolt képletek alapján (jelöljük ezeket (*)-al) – trigonometrikus egyenlőtlenségeket algebrai egyenlőtlenségekre vezetünk vissza.

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket!

1. $p \geq 3\sqrt{3}r$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $(x + y + z)^3 \geq 27xyz$ ami nem más, mint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

2. $R \geq 2r$ (Euler féle egyenlőtlenség)

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ ami nem más, mint a Cesaro-féle egyenlőtlenség, aminek a bizonyítása a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján azonnali, hiszen $x + y \geq 2\sqrt{xy},\ y + z \geq 2\sqrt{yz},\ z + x \geq 2\sqrt{zx}$ és a megfelelő oldalak szorzatából éppen a Cesaro egyenlőtlenség adódik.

3. $p^2 \geq 12Rr + 3r^2$

Megoldás: A (*) képletek alapján használva az $xyz + (x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$ azonosságot a bizonyítandó egyenlőtlenség duálisa $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ vagyis $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ami nem más, mint $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$

4. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$ ami nem más mint a már vizsgált Cesaro-féle egyenlőtlenség.

5. $ar_a+br_b+cr_c\geq 6T$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 6$ vagyis $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 6$ ami nyilvánvaló, hiszen $a+\frac{1}{a}\geq 2$ minden pozitív a szám esetén.

6. $\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\geq 3$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 6$ vagyis $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 6$ ami nyilvánvaló, hiszen $a+\frac{1}{a}\geq 2$ minden pozitív a szám esetén.

7. $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$(x+y+z)^3\geq 27xyz$ ami nem más, mint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

8. $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$2(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ ami könnyen belátható, ha alkalmazzuk a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget az

$x+y,\ y+z,\ z+x$ számokra.

9. $r_a + r_b + r_c \ge 9r$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ ami nem más, mint a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség.

10. $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\ge 9tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\ge 9\frac{\sqrt{xyz}}{x+y+z}$ vagyis $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$ ami nem más, mint a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség.

11. $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \ge p^2$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge x+y+z$ vagyis $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$. Legyen most $\frac{1}{x}=a,\ \frac{1}{y}=b,\ \frac{1}{z}=c$ így bizonyítani kell, hogy $a^2+b^2+c^2\ge ac+bc+ca$ vagyis $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

12. $tg^2\frac{A}{2}+tg^2\frac{B}{2}+tg^2\frac{C}{2}\ge 1$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge x+y+z$ vagyis $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\ge xyz(x+y+z)$ és ha $xy=a,\ yz=b,\ zx=c$ akkor azt kell bizonyítani, hogy $a^2+b^2+c^2\ge ac+bc+ca$ vagyis $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

13. $ctg^2\frac{A}{2}+ctg^2\frac{B}{2}+ctg^2\frac{C}{2}\geq 9$

Megoldás: (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $(x+y+z)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\geq 9$ vagyis $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\geq 9xyz$ ami igaz, hiszen a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján $x+y+z\geq\sqrt[3]{xyz}$, $x^2+y^2+z^2\geq\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

14. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{\sqrt{3}}{2r}$

Megoldás: a (*) képletek, a számtani, mértani és négyzetes középarányosok egyenlőtlenségei alapján rendre felírhatók, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}}\leq$

$$\leq 3\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2}{3}}\frac{1}{2\sqrt{xyz}}=\frac{\sqrt{3}}{2r}\ .$$

15. $\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{b+c}$

Megoldás: Ez a feladat kissé eltér az eddigiektől, ugyanis az előző feladatokban a kifejezések a,b,c -ben, így x,y,z -ben is szimmetrikusak voltak, ellenben most ez nem így van, ami megnehezíti a megoldásunkat. A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $(x+y)(x+z)(y+z)^2\geq yz\left[(x+y)+(x+z)\right]^2$. Vegyük észre, hogy a kifejezés mindegyik tagja 4-ed fokú, azért osszunk végig x^4-el és vezessük be a $v=\frac{y}{x}>0,\ w=\frac{z}{x}>0$ új változókat. Ekkor, kisebb átalakítások után a bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul: $(v-w)^2(1+v+w)\geq 0$ ami igaz.

A bemutatott feladatok alapján lehet, hogy úgy tűnik, hogy a dualitási elv egy univerzális módszer, amolyan „svájci bicska”, vagyis minden trigonometriai egyenlőtlenség könnyen megoldható ezzel a módszerrel. A valóságban ez nem éppen így van, ugyanis könnyen megtörténhet, hogy a kapott duális egyenlőtlenség bizonyítása nem könnyű, esetleg nehezebb mint az eredeti feladaté. Ez attól is függ, hogy az algebrai fegyvertárunkban milyen módszereink vannak. Nézzünk még egy feladatot.

16. $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$

Megoldás: A (*) képletek alapján a duális feladat a következő: $(x+y+z)^3 + 5xyz \geq 4(x+y)(y+z)(z+x)$ amit még így is átírhatunk, hogy $x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz \geq (x+y)(y+z)(z+x)$. Ha jártasabbak vagyunk az algebrai egyenlőtlenség területén, akkor eszünkbe juthat a Schur egyenlőtlenség egy sajátos esete, a következő: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(y+y)yz(y+z) + zx(z+x)$. Próbáljunk ehhez igazodni. Ezért a bizonyítandó egyenlőtlenséget így írjuk át: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq (x+y)(y+z)(z+x) - 2xyz$. De ha kiszámítjuk a jobb oldalt, azt kapjuk, hogy $(x+y)(y+z)(z+x) - 2xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$ vagyis a feladatunk tulajdonképpen egyenértékű a Schur egyenlőtlenséggel.

Azt, hogy a helyzet még tovább bonyolódhat algebrailag, nagyon jól szemlélteti a következő feladat:

17. $2p \leq 3\sqrt{3}R$ (Mitrinovic-féle egyenlőtlenség)

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Megoldás: Lehet, hogy meglepően hangzik, de a három egyenlőtlenségnek ugyanaz a duális egyenlőtlensége, éspedig a következő: $xyz\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq \left[\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\right]^2$.

Ezúttal is kiderül, hogy nagy hasznunkra van, ha sokféle algebrai egyenlőtlenséget ismerünk. Ellenben most feltárom, hogy mi is a bizonyítás gerince:

$$xyz\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \le \left[\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{9}\right]^2 \le \left[\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\right]^2 .$$

Hát erre bizony nem könnyű egyből rájönni, éppen ezért piszkálgassuk meg az egyenlőtlenségeket.

Az első egyenlőtlenség teljesüléséhez elegendő, ha bizonyítjuk, hogy $3xyz(x+y+z) \le (xy+yz+zx)^2$ vagy ha elvégezzük a műveleteket (ez gyakran célszerű eljárás) akkor $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$. És most már jobban látszik, hogy ha $xy=a,\ yz=b,\ zx=c$ akkor azt kell bizonyítani, hogy $a^2+b^2+c^2 \ge ac+bc+ca$ vagyis $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$.

A második egyenlőtlenség bizonyításához elegendő belátni, hogy $8(x+y+z)(xy+yz+zx) \le 9(x+y)(y+z)(z+x)$. Jobb ötlet híján megint csak azt csináljuk, hogy elvégezzük a műveleteket. Ekkor ezt kapjuk, hogy elegendő bizonyítani, hogy: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \ge 6xyz$. A számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján $xy(x+y) \ge 2xy\sqrt{xy}$, $yz(y+z) \ge 2yz\sqrt{yz}$, $zx(z+x) \ge 2zx\sqrt{zx}$,

Ha most három tagra alkalmazva ezt, megkapjuk, hogy $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \ge 3\sqrt[3]{2xy\sqrt{xy}\,2yz\sqrt{yz}\,2zx\sqrt{zx}} = 6xyz$.

A módszer jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak a következő feladatok megoldását javasoljuk:

1) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{3}{4}$

2) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \le \frac{9}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{R} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

4) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$ 5) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

6) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$ 7) $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

8) $ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ 9) $a+b+c\le 3\sqrt{3}R$

10) $ab+bc+ca\ge 3\sqrt{3}R$ 11) $2p^2\ge 27Rr$ 12) $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{p}{bc}$

13) $b+c-a<2b\cos\frac{A}{2}$ 14) $a(b+c)\cos\frac{A}{2}\ge 4T$ 15) $2\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{b^2+c^2}$

Befejezésül megjegyezzük, hogy ez a dualitási elv egyben kitűnő lehetőség ara is, hogy új feladatokat szerkesszünk, hiszen bármilyen trigonometriai egyenlőtlenségnek felírhatjuk a duálisát, mint új feladatot. Persze az Olvasóra marad annak az eldöntése, hogy az eredeti, vagy a duális feladat bizonyítása közül melyik az egyszerűbb.