TIPPEK, TRÜKKÖK, ÖTLETEK

A következő három feladatsor jól felhasználható ötleteket ad olvasóinknak, továbbra is várjuk a rovat számára írt gondolataikat.

Tuzson Zoltán

Néhány feladat

Biztos, hogy az újonnan beindított rovat rövid időn belül a lap egyik közkedvelt és tanulságos rovatává válik, ugyanis a feladatmegoldó tevékenységünk során számos alkalom és lehetőség adódik arra, hogy érdekesebbnél érdekesebb ötletekkel „találkozzunk".

Ízelítőként vizsgáljuk meg az alábbi feladatoknak a szokásostól eltérő, esetenként nem kis meglepetést tartogató megoldásait.

1. Melyik tört a nagyobb

$$A=\frac{2222222221}{3333333332} \text{ vagy } B=\frac{4444444443}{6666666665}?$$

Megoldás: A közönséges – de hosszadalmas – megoldásokra két lehetőség is adódik. Az egyik az, amikor a számlálót elosztjuk a nevezővel. Nyilván, hogy ez a kezdet nem valami biztató. Egy másik ötlet az lenne, hogy számítsuk ki a $2222222221 \cdot 6666666665$ és a $3333333332 \cdot 4444444443$ szorzatokat, amelyek összehasonlítása révén megválaszolhatnánk a feladatot. Mivel ez esetben is hosszas számolásokat kell végeznünk, újabb ötletet keresünk. Bővítsük az A törtet 2-vel, így azt kapjuk, hogy: $A=\frac{4444444442}{6666666664}$. Így már jobban hasonlít a B törthöz. Éppen ezért számítsuk ki az $1-A$ és $1-B$ kifejezéseket:

$$1-A=\frac{2222222222}{6666666664}$$

és

$$1-B=\frac{2222222222}{6666666665}.$$

Most már nyilvánvaló, hogy $1-A>1-B$, vagyis $A<B$.

2. Számítsd ki a következő tört értékét:

$$\frac{1234321234321\cdot 2468642468641-1234321234320}{1234321234320\cdot 2468642468641+1234321234321}!$$

Megoldás: A számolások elvégzése túlságosan hosszadalmasnak ígérkezik. Éppen ezért, ha a speciális eset mögött megfigyeljük az általánost is, célszerű az $a=1234321234321$ jelölés bevezetése. Az összehasonlítási gondolkodási műveletek alapján a kiszámítandó tört így alakul:

$$\frac{a(2a-1)-(a-1)}{(a-1)(2a-1)+a}=\frac{2a^2-2a+1}{2a^2-2a+1}=1,$$

vagyis a kérdéses tört 1-gyel egyenlő.

3. Igazolja a következő azonosságot:

$$\frac{a^3\cdot(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3\cdot(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{c^3\cdot(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^3\cdot(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=x^3$$

(az a, b, c, d páronként különböző valós számok), bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén!

Megoldás: A közös nevezőre hozás és a számolások elvégzése hosszadalmas, unalmas munkát igényel. Vegyük észre, hogy 0-ra rendezés után a bal oldali kifejezés egy legfeljebb harmadfokú polinomnak tekinthető, amit je-

jelöljünk $P(x)$-szel. Alaposabb vizsgálódások után hamar rájöhetünk, hogy $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$, ami azt jelenti, hogy egy legfeljebb harmadfokú polinomnak 4 gyöke lenne. Tehát a $P(x) = 0$ nem egyenlőség, hanem azonosság, vagyis $P(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel állításunkat igazoltuk.

4. A valós számok halmazán oldja meg az

$$(5x-9)(x-2)(3x-1)(15x-2) = 104$$

egyenletet!

Megoldás: A műveletek elvégzése olyan negyedfokú egyenletet eredményezne, amelynek megoldása egyáltalán nem biztató. Ellenben vegyük észre, hogy $(5x-9)(3x-1) = 15x^2 - 32x + 9$ és $(x-2)(15x-2) = 15x^2 - 32x + 4$. Ezért bevezetve a $15x^2 - 32x = y$ jelölést, az $(y+9)(y+4) = 104$ vagyis az $y^2 + 13y - 68 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amelynek gyökei $y_1 = -17$ és $y_2 = 4$. Így rendre megoldva a $15x^2 - 32x + 17 = 0$ és $15x^2 - 32x - 4 = 0$ egyenleteket, a szóban forgó egyenlet négy gyöke: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{17}{15}$, $x_3 = \frac{16+\sqrt{316}}{15}$, $x_4 = \frac{16-\sqrt{316}}{15}$.

5. A valós számok halmazán oldja meg a

$$\sqrt{26-x^2} + \sqrt{29-x^2} + \sqrt{34-x^2} = 1 + x$$

egyenletet!

Megoldás: Könnyen belátható, hogy akár a tagok átrendezése esetén is, a többszörös négyzetre emelés nem olyan egyenlethez vezet, amelynek megoldását könnyűszerrel elvégezhetnénk. Éppen ezért vegyük észre, hogy a bal oldalon álló összeadandók nem lehetnek negatívok, sőt legalább kettő pozitív. Könnyű látni, hogy az összegük 4-nél nagyobb, azaz $x > 3$. Ebben az esetben a bal oldali összeg csupa szigorúan csökkenő függvények összege, míg a jobb oldalon szigorúan növekvő függvény áll. Egyszerűen fogalmazva, ha az x értékét növelem, akkor a bal oldal csökken, a jobb oldal pedig nő. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet. És mivel az $x = 5$ behelyettesítése igaz állítást eredményez, ez lesz az egyenlet egyetlen megoldása.

6. A valós számok halmazán oldja meg a

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x-5} = 5$$

egyenletet!

Megoldás: Az ilyen típusú egyenletnek két klasszikus megoldási menete is van. *Az első:* köbre emelve egy $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = c$ egyenlőséget, a $c^3 = a + b + 3\cdot\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) = a + b + 3\cdot c\cdot\sqrt[3]{ab}$ típusú átalakítás nyomán, pontosan egy harmadfokú egyenletet kell megoldanunk. *A második ötlet:* jelölje $u = \sqrt[3]{2x+1}$ és $v = \sqrt[3]{x-5}$, ahonnan – az eredeti egyenlet alapján, továbbá az x kiküszöbölése során – az $u + v = 5$ és $u^3 - 2v^3 = 9$ egyenletrendszert kapjuk, ahonnan szintén egy harmadfokú egyenlet megoldásához jutunk. Azonban könnyűszerrel észrevehető, hogy az $x \mapsto 2x+1$, $x \mapsto x-5$ leképezések monoton növekvő függvényt határoznak meg. Tehát a bal oldali összeg egy szigorúan növekvő függvény, míg a jobb oldal egy állandó. Ezért, ha van megoldás, csak egy lehet, és $x = 13$ éppen megfelel.

7. Határozza meg az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 30,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 100,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 24$$

egyenletrendszer összes megoldását!

Megoldás: Ha a klasszikus elméletet követnénk, a gyökök és együtthatók közötti (ún. Viète-féle) összefüggések alapján egy $x^4 - s_1\cdot x^3 + s_2\cdot x^2 - s_3\cdot x + s_4 = 0$ egyenletet kellene képeznünk. A nehézség az s_3 meghatározásában áll. Nem nehéz belátni, hogy az (1, 2, 3, 4) számnégyes egyenletrendszerünk egy megoldása. Mivel egyenleteink szimmetrikusak az x_1, x_2, x_3, x_4 változókban, ezért az (1, 2, 3, 4) számnégyes további 23 permutációja is megoldás lesz. És mivel a négy egyenlet fokszámainak szorzata éppen 24, ezért a szóban forgó 24 megoldás az összes megoldást adja.