Útvonalak száma, rekurzív számlálással

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

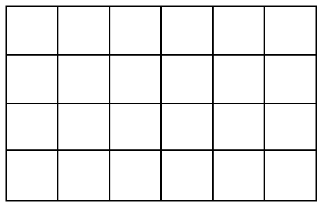
Napjainkban is gyakran találkozhatunk olyan feladatokkal, ahol azt kell megszámolnunk, hogy adott pontból, vagy pontokból kiindulva, adott feltételek mellett hányféleképpen juthatunk el egy másik pontba, vagy pontokba. Ezen feladattípusok egy másik változata az, amikor azt kell megszámlálnunk, hogy adott feltételek mellett, hányszor olvasható ki egy szó, egy adott betűelrendezésből.

Természetesen, ezen feladattípusok a kombinatorika tárgykörébe tartoznak, de a továbbiakban éppen arra akarunk rávilágítani, hogy az említett feladattípusok hogyan oldhatók meg az elemi és a gimnáziumi osztályokban is, továbbá rávilágítunk a feladatoknak a kombinatorikai hátterére is. Így minden bizonnyal sokkal érdekkeltőbben és vonzóbban végezhetjük a kombinatorika tanítását, akár már kisebb osztályosok esetén is.

1. példa

A mellékelt ábrán egy úthálózat látható. Jancsi, az **A** pontban levő lakásától indulva, a **B** pontban levő iskolába a lehető legrövidebb úton akar eljutni. Hányféleképpen teheti ezt meg?

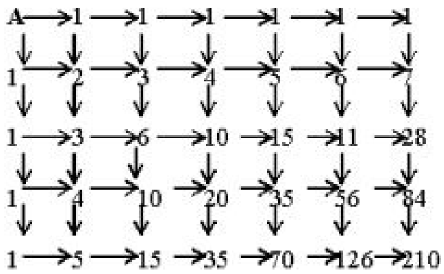
A



1.a ábra B

Megoldás: Reménytelen lenne az összes utak bejárása, hiszen mint látni fogjuk, ez nem is kevés. Anélkül kellene megállapítanunk ezt, hogy ne kelljen egyenként megszámolni a lehetőségeket.

Először is vegyük észre, hogy az **A** pontból a **B** pontba vezető legrövidebb utak éppen azok amelyek éppen 6 vízszintes és 4 függőleges rácsszakaszból álló „töröttvonalak”, amelyeknek kezdőpontja **A**, végpontja pedig **B**. A feladat kérdését úgy is átfogalmazhatjuk, hogy hányféleképpen juthatunk az **A** pontból a **B**-be, ha csak jobbra vagy lefele haladhatunk az úthálózaton. A mellékelt (1. b) ábrán az egyes rácspontokra írt számok azt mutatják, hogy az illető rácspontra (a jobbra vagy lefelé feltétellel) hány út visz. Az első sor, illetve első oszlop rácspontjaira 1-et kell írnunk. Minden másik rácspontra, a közvetlenül felette vagy előtte levő rácspontokról juthatunk, ezért ide az előtte és felette levő két szám összege kerül.



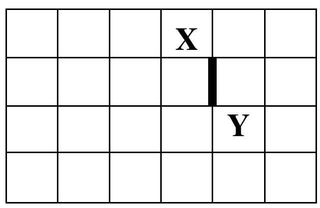
1.b ábra

Így kaptuk az 1.b ábrán látható számokat, miszerint kiderül, hogy Jancsi éppen 210-féle legrövidebb úton juthat el a lakásától az iskolába.

2. példa

Ugyanaz a kérdés, mint az előbbi példánál csupán azzal a változtatással, hogy Jancsi bármelyik útvonalat is választja, mindegyik esetben át kell mennie az **XY**- nal jelölt hídon, ebben a sorrendben.

A

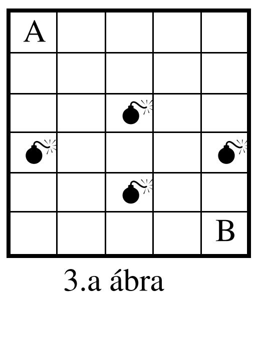


2.a ábra B

Megoldás: Az **XY** rácsszakaszon áthaladó utak számát a következőképen határozzuk meg: Az 1. b ábra szerint az **A**-ból az **X**-be éppen 5 út vezet. Az **X** és **Y** között csak 1 út vezet, továbbá az **Y**-ból a **B**-be éppen 6 út vezet (nézzük meg az 1.b ábra első 3 sorából és első 3 oszlopából álló téglalap jobb alsó sarkánál levő 6-ost). Tehát az **A**-ból az **XY** szakaszon keresztül a **B**-be pontosan $6 \cdot 5 = 30$ legrövidebb út vezet.

3. példa

A mellékelt 3.a ábrán egy téglalap alakú földparcella látható. Ennek **A** mezőjéből egy katona lőszert kell szállítson a **B** mezőbe, a lehető legrövidebb úton. Lépnie csak a szomszédos mezőkre lehet jobbra vagy lefelé, azonban a -val jelölt mezőket aláaknázták. Hányféle képen juthat el a katona legrövidebb úton az **A** mezőből a **B** mezőbe anélkül, hogy aknára lépne?



3.a ábra

Megoldás: Szintén az előző példák helyzetében vagyunk azzal a különbséggel, hogy ezúttal az ottani rácspontoknak most a mezők (a kisnégyzetek), az éleken való „lépésnek” most a mezőkről mezőkre való lépés felel meg. Akárcsak az 1. példa esetén is, most is megjelöljük, hogy ha csak jobbra vagy lefele lépünk egyik mezőről egy szomszédos mezőbe, hány út is vezet oda. Ezek számát a mellékelt 3.b ábrán láthatjuk a megfelelő mezőkbe beírva. Ezek szerint a katona pontosan 10+7=17 legrövidebb úton juthat el az **A** pontból a **B** pontba.

A	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3		4	4
	3	3	7	
0	3		7	7
0	3	3	10	**B**

3.b ábra

4. példa

Az alábbi három sakktáblán rendre egy bástya (**B**), egy király (**K**) illetve egy futó (**F**) akar eljutni az **X**- el jelölt mezőbe.

			B				
				X			

4.1.a ábra

			K				
				X			

4.2.a ábra

			F				
				X			

4.3.a ábra

Minden esetben az illető bábú lépési szabálya szerint úgy kell ennek lépnie, hogy minden lépése közelebb vigye a célhoz. Hányféle képen juthatnak el az egyes bábúk a célhoz?

Megoldás: Az előző példa mintájára ezúttal is, az egyes mezőkbe írt számok azt mutatják, hogy odáig hány út visz.

			B	1			
			1	2			
			1	3			
			1	4			
			1	5			
			1	6			
			1	7			
			1	**8**			

4.1.b ábra

			K				
		1	1	1			
	1	2	3	2	1		
1	3	6	7	6	3	1	
	10	16	19	16	10	4	1
		45	51	45	30	15	
			141	126	90		
				357			

4.2.b ábra

			F				
		1		1			
	1		2		1		
1		3		3		1	
	4		6		4		1
		10		10		5	
			25		15		
				35			

4.3.b. ábra

A 4.1.b- 4.3.b ábrák alapján a bástya 8, a király 357, a futó 25-féle képen érhet a célba.

5. példa

Hányféle képen olvasható ki a MATLAP szó az alábbi esetek mindegyikében, ha minden esetben az illető ábrán látható M betű(k)-ből kell kiindulni, és a látható P betű(k)-be kell érkezni. Lépni csak közvetlen szomszédos mezőkre lehet jobbra vagy lefele, az 5.6.a ábra esetén balra is léphetünk, az 5.7.a ábra esetén pedig fölfelé is (amikor lehetséges).

M	A	T	L
A	T	L	A
T	L	A	P

5.1.a ábra

M	A	T
A	T	L
T	L	A
L	A	P

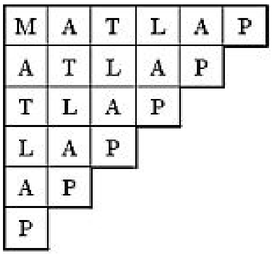
5.2.a ábra

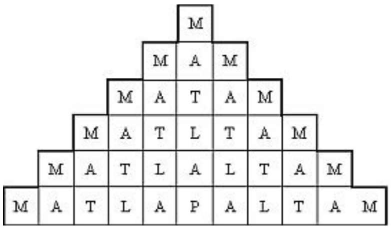
M	A	T		
A	T	L	A	P
		A	P	
		P		

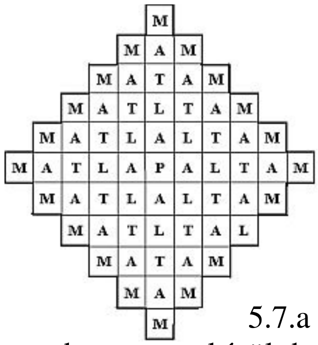
5.3.a ábra

	M				
M	A	T	L	A	P
	T	L	A	P	

5.4.a ábra

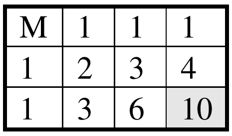


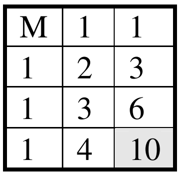


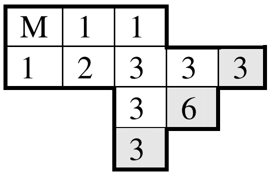


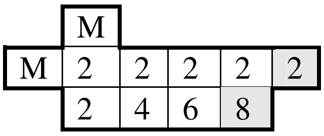
5.5.a ábra 5.6.a ábra 5.7.a ábra

Megoldás: Mielőtt megoldanánk a feladatokat vegyük észre, hogy azon kívül, hogy a betűk különböző alakzatokba vannak írva, az egyes esetek között az a lényeges különbség, hogy esetenként: egy M betűből egy P betűbe érkezünk; egy M betűből több P betűhöz érkezünk; több M betűből indulva több P betűhöz érkezünk vagy több M betűből indulva egy P betűhöz érkezünk. Az egyes mezőkbe írt számokat az előző példák mintájára kapjuk:

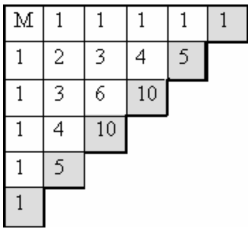


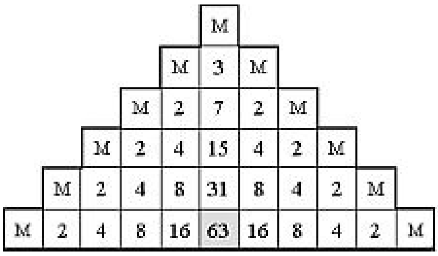


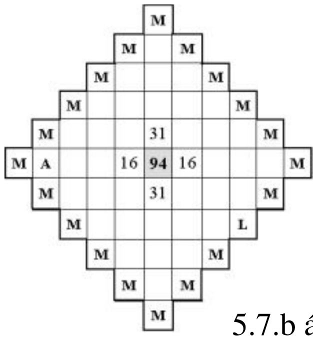




5.1.b ábra 5.2.b ábra 5.3.b ábra 5.4.b ábra







5.5.b ábra 5.6.b ábra 5.7.b ábra

Tehát a MATLAP szó, az egyes esetekben, 10, 10, 3+6+3=12, 8+2=10, 1+5+10+10+5+1=32, 63, 31+16+31+16=94 (lásd az 5.6.b ábra alsó két sorának közepét) módon olvasható ki.

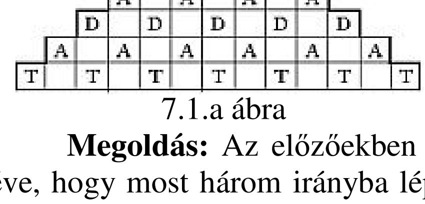
6. példa

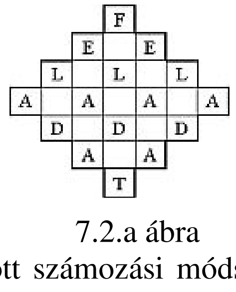
Ugyanaz a kérdés mint az előző példa mind a 7 feladata esetén csak ezúttal, minden lépésnél irányt kell változtatni!

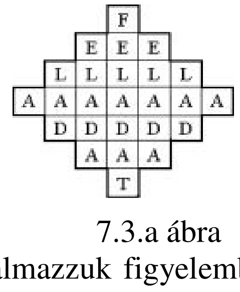
Megoldás: Az 5.1, 5.2 és 5.3 feladatok esetén mindhárom esetben éppen 1-szer olvasható ki. Az 5.4 esetén egyszer sem olvasható ki, az 5.5 feladat esetén 2-szer, az 5.6 feladat esetén szintén 2-szer (a 4. sor egy-egy M betűjéből indulva), az 5.7 feladat esetén pedig 4-szer olvasható ki (a 4. és 8. sor két-két M betűjéből indulva).

7. példa

Hányféle képen olvasható ki a következő elrendezésekben a FELADAT szó, ha csak lefelé, és rézsút balra, illetve rézsút jobbra haladhatunk?

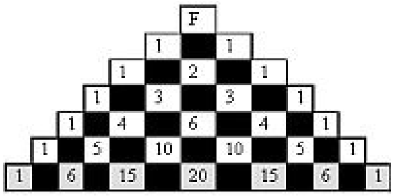


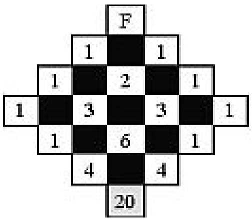


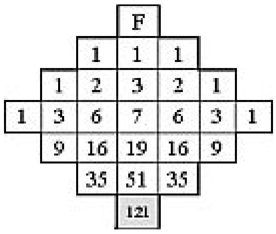


7.1.a ábra 7.2.a ábra 7.3.a ábra

Megoldás: Az előzőekben alkalmazott számozási módszert alkalmazzuk figyelembe véve, hogy most három irányba léphetünk. Azokat a mezőket, amelyekre nem lépünk (tehát fölöslegesek), besötétítettük, az érkezési mezőket – akár csak eddig is- enyhén árnyékoltuk.







7.1.b ábra 7.2.b ábra 7.3.b ábra

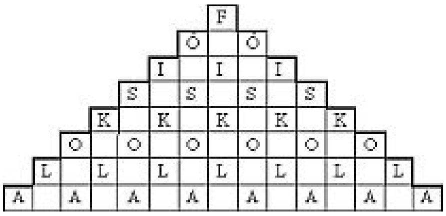
Tehát a FELADAT szó az egyes esetekben 1+6+15+20+15+6+1=64, 20 illetve 121 módon olvasható ki.

Érdemes megjegyezni, hogy az érdeklődő Olvasó könnyen alkothat a dolgozatban bemutatottakhoz hasonló feladatokat, ha választ valamilyen szót, alakzatot amiben a betűket elhelyezi, és lépési szabályt, esetleg egyéb kikötéseket.

Végezetül álljon itt egy, az előbbiekhez hasonló, de mégis különös feladat:

8. példa

Az alábbi módon helyeztük el a FŐISKOLA fényreklámját:



Hányféle képen villanhat fel a FŐISKOLA 8 betűje, ha minden betű kétféle színben villanhat fel és a legfelső betűből kiindulva mindig a kivilágosodó betű alatti sorban levő, a hozzá legközelebbi két betű közül az egyik villan fel?

A feladat megoldását (és a $2^7 \cdot 2^8$ eredményt) a [7]-ben is megtalálhatjuk (215. oldal). A bemutatott témakör iránti érdeklődő Olvasók az [1]-[8] könyvekben még további feladatokat talál.

A feladatok kombinatorikai háttere

Sokunkkal megeshetett, hogy a [8]-ban, az-az a „régi” X. osztályos algebra tankönyv 59. oldalán, a fakultatív részként megjelölt „*A* C_n^k *számok mértani értelmezése*” rész fölött esetleg könnyen átsiklottunk. Ez azért lenne sajnálatos, mert az 1. példa megoldása éppen a $C_{4+6}^6 = C_{10}^6 = 210$ mértani alkalmazása. Ha ebben a példában a vízsztintes sorok (nem a „vonalak”!) számát (n-k)-nak, a függőleges oszlopok (nem a „vonalak”!) számát k-nak vesszük, akkor az A-ból a B-be vezető legrövidebb utak száma éppen $C_{(n-k)+k}^k = C_n^k$. Amennyiben a sorok és oszlopok számát fölcseréljük, akkor a $C_{k+(n-k)}^{n-k} = C_n^{n-k}$ alapján szimmetria miatt, mértani úton is belátható a $C_n^k = C_n^{n-k}$ úgynevezett „*kiegészítő kombinációs képlet*” .Ezt jobban megértjük (vagy éppen ezért is nem kell csodálkoznunk), hogy ha megfigyeljük az 5. példa 5.1.a és 5.2.a feladatait, ahol az eredmény mindkét esetben 10.

Érdemes azt is észrevennünk, hogy az 1. példa (és így az 5.1.a és 5.2.a példa is) megoldható az úgynevezett ismétléses permutációval. Az 1. példa esetén minden legrövidebb út keresése esetén egy kiolvasáshoz 4 lépést lefelé, 6 lépést jobbra kell tennünk. A lehetőségek számát „llllјjjjjj” betűk permutációi adják, ami képletesen: $P_{4+6}^{4,6} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$ a már ismert eredmény. (Ismeretes, hogy n!=1·2·3·…·n, és 0!=1). Ezáltal azt is feleleveníthettük, hogy $C_n^k = P_n^{k,n-k}$ is igaz.

Az előbbiek alapján tehát az 5.1.a és 5.2.a esetén a megoldások száma éppen

$P_5^{3,2} = P_5^{2,3} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$. Fontosnak tartjuk kihangsúlyozni, hogy ez utóbbi két esetben, az 1. példával ellentétben, itt a rácspontok a „kisnényzetek” középpontjainak felelnek meg. A kiolvasandó MATLAP szó ugyan 6 betűből áll, de mivel ezek a rácspontok, így a közöttük levő egyenkénti egymás utáni távolságok összege csak 5. Az 5.1.a feladat esetén jobbra 3 „betűköz” van, míg lefele 2 „betűköz”. Az 5.2.a feladat esetén fordítva. Ezért alkalmaztuk az ismétléses permutációt, a már leírt számokra.

A 3., 5. és 7. példa egyes feladatainak a megoldásában megfigyelhettük, hogy a mellékelt ábrán látható úgynevezett „Pascal-féle háromszög” számai jelentek meg. Ennek egyik sajátossága az, hogy egyes számai, a fölötte levő bal- illetve jobb szomszéd számok összege. Továbbá az is ismert tény hogy az egyes sorok számai éppen az $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ úgymond kifejtésében az egyes tagok együtthatói. Ily módon az úgynevezett „Newton binomiális képlet” hiányában, a X. osztálynál kisebb osztályos tanulók is kiszámíthatják az $(a+b)^n$ kifejtését, csupán a Pascal háromszög segítségével (természetesen, ha „n” nem túl nagy szám).

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
-------------------------------------------
```

Az előbbi, Pascal-féle háromszög egyes sorában szereplő számokat még „binomiális együtthatóknak” is nevezzük, képletesen ezek C_n^k-val egyenlőek (ezt még $\binom{k}{n}$ módon is jelölik), és a X. osztályban a $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ képlettel számoljuk ki.

Az 5.5.a feladat megoldása kapcsán megjegyezzük, hogy a lehetőségek számát az úgynevezett ismétléses variációval is megkaphatjuk. A kiolvasási lehetőségek száma $V_2^{5,i} = 2^5 = 32$, ugyanis az M-től a P-ig 5 lépésben juthatunk el, minden lépésnél 2-féle választási lehetőségünk van, a két irány.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az érdeklődő Olvasó még sok számos kombinatorikai összefüggésre bukkanhat, amelyek a bemutatott feladatokhoz kapcsolódhatnak.

Szakirodalom

[1] Róka Sándor: Kombinatorika, Tóth Könyvkereskedés, Debrecen, 2001 (15.-17. old.)

[2] Bonifert Domokos: Néhány tipikus problémaszituáció matematikából, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994 (188.-190. old.)

[3] Dr. Iker János: Meddig juthatunk el az általános iskolában a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésében? A Matematika Tanítás, 3/1984 (65.-68. old.)

[4] ABACUS 2002 decemberi száma, 3. oldal

[5] Bartha Gábor és társai: Matematika feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára (Második kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1988 (345.-347. old.)

[6] Gádor Endréné és társai: Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984 (464. old.)

[7] Bereczki Tibor és társai: Matematika feladatgyűjtemény az általános képzéshez, a tanítóképző főiskolák számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1996 (82.-86. od)

[8] C. Năstăsescu és társai: Matematika tankönyv a X. osztály számára (algebra), E.D.P. Bucureşti 1990 tankönyv 59. old.