Variációk egy egyenlőtlenség kapcsán

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Mint a régebbi, mint az újabb alternatív tankönyvekben valamint számos feladatgyűjteményben, a matematikai indukció tanítása fejezetben megtalálható a következő feladat:

1. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$ (v.ö.: [1], [2], [3])

A feladat egymagában nem rejteget semmilyen nehézséget, matematikai indukcióval (röviden M.i.) könnyen megoldható, hiszen n= 1 esetben $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ nyilvánvalóan igaz, és a M.i. szerint elegendő ha belátjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \Leftrightarrow (2n+1)(2n+3) \leq (2n+2)^2 \Leftrightarrow 3 \leq 4$ ami igaz állítás. A feladatra ellenben létezik egy nagyon egyszerű és ötletes direkt bizonyítás is (v.ö. [13]): $4k^2-1 < 4k^2 \Leftrightarrow (2k-1)(2k+1) < (2k)^2$ és összeszorozva ezeket az egyenlőtlenségeket $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ értékekre összeszorozva éppen a kért egyenlőtlenség négyzete adódik.

Mindezek mellett az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés még sok számos egyenlőtlenségben megtalálható, és mint látni fogjuk, a fenti egyenlőtlenség jóval mélyebb gyökerekkel rendelkezik mint ahogyan az első látásra gondolnánk. A továbbiakban éppen ezekre a kapcsolatokra fogunk rávilágítani, és eljutunk az egyenlőtlenség természetes „környezetéhez" is, ahonnan származik. A kifejezések könnyebb kezelhetősége kedvéért vezessük be a következő jelöléseket: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1) = (2n-1)!!$ és $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n) = (2n)!!$ ahol a „dupla felkiáltójelt" ezúttal „faktor-faktor" szóval olvassuk ki. Legyen továbbá: $E_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Az előbbi feladat kapcsán még a következő feladattal is találkozunk:

2. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Az első látásra a feladat triviálisnak tűnhet, hiszen az $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ nyilvánvaló egyenlőtlenség alapján az 1. feladat élesebb (szigorúbb) egyenlőtlenséget fejez ki mint ez utóbbi. Mindez ellenére, a feladatnak megvan a maga érdekessége (v.ö. [4]) hiszen ha a M.i. módszerével akarnánk bebizonyítani, akkor az 1. példa esetén is ellenőrizendő lépés $\frac{1}{\sqrt{2n}}\,\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$ vagyis $(2n+1)^2 \leq 4n(n+1) \Leftrightarrow 1 \leq 0$ hamis állításhoz jutnánk. A [4]-ben is kihangsúlyozzák, hogy a M.i. módszere alkalmazásakor találkozhatunk olyan esetekkel is, amikor egy szigorúbb (élesebb) egyenlőtlenség bizonyítását sikeresen elvégezhetjük, ellenben egy kevésbé szigorú egyenlőtlenség bizonyítására a M.i. nem alkalmas. A 2. feladat bizonyítását természetesen az 1. feladat bizonyítása által kapjuk meg (tehát előbb egy kevésbé éles egyenlőtlenséget bizonyítunk), majd felhasználjuk a tranzitivítást (a láncszabályt), miszerint $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ nyilvánvalóan igaz.

Az előző feladatok kapcsán természetesen merült fel az az elvárás, hogy az E_n kifejezésre az előbbieknél élesebb (szigorúbb) egyenlőtlenségeket kapjunk. Íme egy ilyen egyenlőtlenség:

3. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$ (v.ö.: [3], [5]) A feladat bizonyítása könnyedén megy a M.i. -val , hiszen elegendő ellenőrizni a következő egyenlőtlenséget: $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ ami a 0≤ n nyilvánvaló egyenlőtlenséghez vezet.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy az E_n kifejezésre létezik-e jobb felső becslés és ez bizonyítható-e a M.i.-val. Ennek a megválaszolását későbbre halasszuk, hiszen akkor már több más információ birtokában leszünk. Ellenben most egy olyan természetes elvárásra próbálunk választ adni, amely az E_n kifejezés alsó korlátainak megállapítására irányul.

4. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $$\frac{1}{\sqrt{4n+1}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}$$

5. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség: $$\frac{1}{\sqrt{4n}}\leq\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}$$

Ezúttal is könnyen belátható, hogy az utóbbi egyenlőtlenség az élesebb (szigorúbb), hiszen nyilvánvalóan igaz, hogy: $\frac{1}{\sqrt{4n+1}}<\frac{1}{\sqrt{4n}}$. Az 2. feladat „érdekességéből" tanulva azonnal fel is merül a kérdés, hogy melyik feladat bizonyítható a M.i.- val ? Ezúttal nincs semmi meglepetés, mindkettő igazolható a M.i.-val. Az 5. feladat igazolása végett, a M.i. alapján elegendő ellenőrizni, hogy $\frac{1}{\sqrt{4n+4}}\leq\frac{1}{\sqrt{4n}}\frac{2n+1}{2n+2}\Leftrightarrow 4n(n+1)\leq(2n+1)^2 \Leftrightarrow 0\leq 1$ ami igaz állítás.

Az idők folyamán a matematikusok rájöttek, hogy a M.i.-val nem lehet lényegesen áttörő eredményt bizonyítani, így más, szebbnél szebb bizonyítási módszerek kerültek elő.

6. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenséglánc: $$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{2n}}$$ (v.ö.: [5], [6])

Hamar rájöhetünk arra, hogy a baloldali egyenlőtlenséget az 5. feladatban M.i.-val bizonyítottuk, a jobboldali egyenlőtlenség a 2. feladat, amit az 1. feladat és a tranzitivítással ugyancsak M.i.-val bizonyítottunk. Ezúttal a M.i. módszerétől különböző módszerrel bizonyítunk!

Könnyen belátható, hogy ha 0< a< b és k>0 akkor $\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}$ is igaz. Ennek az ismételt alkalmazásával (*k=1* értékre) kapjuk, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$ ahonnan kapjuk, hogy $E_n^2<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}$ vagyis $E_n<\frac{1}{\sqrt{2n}}$ (persze az $E_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ is bizonyított).

Teljesen hasonlóan $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$ ahonnan hasonlóan kapjuk, hogy $E_n^2>\frac{1}{4n}$ vagyis $E_n>\frac{1}{\sqrt{4n}}$ (itt már nem „gyengítettük" az egyenlőtlenséget).

7. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenséglánc: $$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\leq\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$ (v.ö.: [4], [7])

Ezúttal is belátható, hogy a külalaki rendezéstől eltekintve a baloldali egyenlőtlenség ugyancsak a M.i.-val bizonyított 5. feladat egyenlőtlensége, ellenben a jobboldali egyenlőtlenség az eddigieknél másabb jellegű. Az A. O. Gelfond orosz matematikus bizonyítása roppant ötletes és egyszerű:

$E_n^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n}$. De minden k> 1 egész szám esetén $\frac{(2k-1)^2}{(2k-2) \cdot (2k)} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - 1} > 1$ ezért $E_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n}$ ahonnan az $E_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$ adódik. Másfelől, a $\frac{(2k-1) \cdot (2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2 - 1}{(2k)^2} < 1$ egyenlőtlenség alapján, $E_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1) \cdot (2n-3)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n^2)} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2n}$ ahonnan az $E_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$ egyenlőtlenség adódik. A bizonyított megközelítések kellően „erősek”, hiszen a igaz a következő becslés: $\sqrt{n} \cdot E_n \in [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}})$ és ez utóbbi megközelítőleg egy 0,11237… hosszúságú intervallum, ami azt jelenti, hogy a becslések valóban „élesek”.

Mindezek ellenére, a 3. és az 5. feladat összevonásából a következő egyenlőtlenséglánc jobboldali becslése élesebb korlátot ad, mint az előbbi becslés:

8. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenséglánc: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)} < \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

A baloldali egyenlőtlenség a 3. feladat, a jobboldali egyenlőtlenség pedig az 5. feladat „gyengítéséből” származik, hiszen $E_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ és vegyük észre, hogy $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ és megvan az az érdekessége is, hogy a 2. feladathoz hasonlóan a 8. feladat jobboldali egyenlőtlensége ezúttal sem bizonyítható M.i.-val.

Az idők során természetesen merült fel olyan $(a_n)_{n \geq 1}$ és $(b_n)_{n \geq 1}$ sorozatok keresése, amelyekre $a_n \leq \sqrt{n} \cdot E_n \leq b_n$ úgy, hogy $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$ és ez a közös határérték véges szám.

Eléggé hosszas számolásokkal, de elemi módszerekkel a [8]-ban megtalálunk egy választ:

9. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2n-1}{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot x_n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot y_n}}$$

ahol $x_n = \frac{2n}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2n}$ és $y_n = \frac{4n}{\pi} \cdot tg \frac{\pi}{4n}$ továbbá ismeretes, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

Így a dupla egyenlőtlenség alapján azonnal adódik, hogy $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot E_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ami megközelítőleg 0,5641…és mint látható nagyon közel áll a 7. és a 8. feladat egyenlőtlenségei alapján kapott $\sqrt{n} \cdot E_n \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}) \subset [\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}})$ becslésekhez. Ezek alapján most már könnyebben belátható, hogy miért nincs sok esély arra, hogy n≥1 esetén a 7. és 8. feladat korlátait elemi módszerekkel „lényegesen élesíthessük”. Természetesen, ha lemondanák az $n \geq 1$ kikötésről, és pl. az $n \geq 2$ feltételre cserélnénk, akkor az $\frac{1}{\sqrt{4n}}$ alsó korlátot pl. $\frac{1}{\sqrt{a \cdot n}}$ alakban keresve, ebben az esetben a

„legjobb” a érték $\frac{32}{9} \approx 3{,}555\ldots$ és ha az $n \geq 2$ feltételt tovább gyengítenénk, számítógépes programmal ellenőrizhető, hogy ez az a állandó nagyon lassan csökkenne. Ugyanilyen helyzettel állunk szembe, ha a jobboldali, felső korlátot próbálnánk élesíteni. Nyilvánvalóan a $\frac{1}{\sqrt{4n}}$ és $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ sorozatok alakját (a függvény képletét) is változtathatnánk, de az előbbiekben, a határértékkel bizonyítottak alapján láthatjuk, hogy elemi módszerekkel lényegre törő lépést nem tehetnénk.

A matematikai analízis eszközeivel megfogalmazhatjuk és bizonyíthatjuk a tárgyalt témakörben az egyik „legjobb” dupla egyenlőtlenséget, ami nem más mint a Wallis-formula bizonyításánál a leggyakrabban használt dupla egyenlőtlenség.

10. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenséglánc: $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

A bizonyítás fontosabb lépéseit a [9], [10], [11], [13], [14] alapján mutatjuk be.

Vezessük be a következő jelölést: $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$. A parciális integrálási módszerrel rekurzív módon, a M.i. módszerével levezethetők a következő eredmények:

$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot(2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$ illetve $I_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Továbbá mivel minden $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $n \in \mathrm{N}^*$ esetén igaz, hogy $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ amit a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon integrálva, és az előbbiek szerint behelyettesítve az I_{2n+1}, I_{2n}, I_{2n-1} értékeit, rövid számolások után éppen a 10. feladat egyenlőtlenségeit kapjuk. A 10. feladat alapján a híres Wallis formula a következő: $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot(2n)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi$.

A Wallis formulának több alakja is van, például: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx$, vagy $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ vagyis $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{\pi}{2}$ és ez végtelen szorzat formájában: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$. Ez a felírás a π számnak csupán egyik előállítási lehetősége, számos más érdekes előállítási lehetőséget a http://hu.wikipedia.org/wiki/Pi_(szám) webcímen találunk. Érdemes megjegyeznünk, hogy a 10. feladat egyenlőtlensége így is írható: $\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})} < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \sqrt{\pi n}$ ami aszimptotikus megközelítésként a következő alakba írható: $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi(n+\theta)}$ ahol $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Létezik ennél „finomabb” aszimptotikus megközelítés is (v.ö. [12], [14]) miszerint $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{3}$, ami a következő egyenlőtlenségláncból adódik:

11. feladat: Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz a következő egyenlőtlenséglánc: $\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})} < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \sqrt{\pi(n+\frac{1}{3})}$ (v.ö. [14]).

Mint az egyenlőtlenséglánc mint annak a nagyszerű bizonyítása Dr. Tóth Lászlótól, a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának tanszékvezető docensétől származik: legyen $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)}}$, és $y_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{3}\right)}}$. A 10. feladat dupla egyenlőtlensége alapján azonnal látható, hogy $\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} y_n = 1$. Továbbá egyszerű számolásokkal azonnal igazolható, hogy $x_{n+1} < x_n$ és $y_n < y_{n+1}$. És mivel egy konvergens és szigorúan csökkenő (növekvő) sorozat általános tagja kisebb (nagyobb) mint a határértéke, azért az egyenlőtlenséglánc máris bizonyított.

Befejezésül megjegyezzük, hogy a Wallis-formula a matematikában nagy fontossággal rendelkező $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{e}{n}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$ úgynevezett Stirling-formula bizonyításának egyik fontos láncszemét képezi.

Szakirodalom:

[1] C. Nastasescu, C. Nita, S. Popa: Matematika Tankönyv a X. osztály számára, Algebra, EDP Bucuresti – 1990, 48. oldal, 5.c feladat.
[2] C. Nastasescu, C. Nita, I. Chitescu, D. Mihalca: Matematika a IX. osztály számára, EDP Bucuresti – 2004, 56. oldal, 5.c feladat.
[3] L. Panaitopol, V. Bandila, M. Lascu: Egyenlőtlenségek (András Szilárd fordítása), GIL Kiadó, Zilag – 1996, 76. oldal 5.6 feladat.
[4] Probleme de matematica traduse din revista sovietica KVANT, vol. I., problemele 1- 200 (Selectat si tradus de Lector Univ. Dr. Horea Banea), EDP Bucuresti – 1983, 48-49. oldal M23. feladat.
[5] D. O. Skljarszkis, N. N. Csenkov, I. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Aritmetika és Algebra 1., Typotex Kiadó 2000, 217. oldal 141. feladat.
[6] I. Cucuruzeanu: Probleme de aritmetica si teoria numerelor, EDP Bucuresti – 1976, 173. oldal, V. 45. feladat.
[7] Titus Popescu: Matematica de vacanta, Editura Sport Turism, Bucuresti – 1986, 226 oldal és 390. oldal 391. feladat.
[8] A. M. Iaglom, I. M. Iglom: Probleme neelementare tratate elementar, Editura Technica, Bucuresti (1954-ben kiadott orosz nyelvű könyv fordítása), 338. oldal, 145. feladat.
[9] Lia Arama, Teodor Morozan: Probleme de calcul diferential si integral, EDP Bucuresti – 1978, 371. oldal, VI. 79-82. feladatok.
[10] L. Panaitopol, M. E. Panaitopol, M. Lascu: Inductia matematica, Editura GIL, Zalau – 1997, 25. oldal 23. feladat.
[11] Császár Ákos: Valós analízis I., Tankönyvkiadó, Budapest 1983, 309-310. oldalak.
[12] Matematikai Lapok 1/1991, 44. oldal, 22255. feladat (Tóth László javasolta)
[13] D. Flondor, M. Donciu: Algebra si analiza matematica, culegere de probleme, vol. II., EDP Bucuresti – 1979, 387. feladat, 211-212. oldalak.
[14] N. D. Kazarinoff: Analitic Inequalities, Holt New York 1961, 47-48. old, 63-66. old