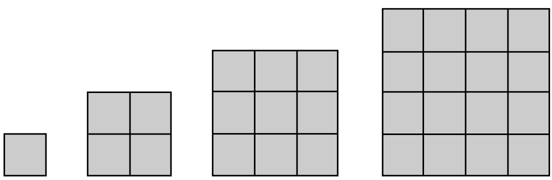
POLYGON
XXIII/1–2. sz., 2016. márc.

Variációk egy logikai feladat kapcsán

Tuzson Zoltán

Egy IQ tesztben a következő feladvánnyal találkoztam:

(1)



1 9 14 ?

Milyen szám talál a kérdőjel helyére? Indokold meg a válaszodat!

Hosszabb-rövidebb gondolkodás után rájövünk, hogy kell legyen kapcsolat a számok és a rajzon látható négyzetek között. Pontosabban, rájöhetünk arra, hogy a számok az illető ábrán látható négyzeteknek a számát jelölik. Ezután tehát az a kérdés, hogy hány négyzet látható a 4×4-es felosztáson? Ebből a célból gondolkozhatunk lépésről lépésre, analitikusan, vagy általánosan, globálisabban, úgymond szintetikusan.

Nézzük előbb analitikusan: Az 1×1-es négyzetből van 16; a 2×2-es négyzetből minden sorban van 3, ez összesen 9; a 3×3-as négyzetekből a négy sarokban van 4, és végül a 4×4-es négyzetből van 1. Tehát összesen: $16+9+4+1=30$ négyzet látható, vagyis a kérdőjel helyére 30 kerül. Játszódjunk egy kicsit a megadott és a kapott számokkal! Észrevehető, hogy

$$\begin{aligned} 5 &= 4 + 1 = 2^2 + 1^2, \\ 14 &= 9 + 5 = 9 + 4 + 1 = 3^2 + 2^2 + 1^2, \\ 30 &= 16 + 9 + 4 + 1 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2. \end{aligned}$$

Így azt sejthetjük, hogy az 5×5-ös felosztás esetén az ábrán $5^2+4^2+3^2+2^2+1^2 = 55$ négyzetet látnánk. Ezért természetesen merül fel, hogy általánosítsuk a feladványt $n \times n$ kisnégyzetre:

1. feladat. Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Egy négyzetet, az oldalakkal párhuzamos vonalakkal felosztunk $n \times n$ kisnégyzetre. Hány négyzet látható ezen az ábrán?

Megoldás. Az előző megoldás gondolatmenetét követjük: Az 1×1-es kisnégyzetekből éppen $n \times n = n^2$ darab található. Most nézzük a 2×2-es méretű négyzeteket. Ezekből soronként $n-1$ darab van, és lefele $n-1$ sorunk lesz, ezért összesen $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$ darab 2×2-es kisnégyzetünk lesz. Ezt az eljárást folytatva az $(n-1) \times (n-1)$-es négyzetből, 2 sorban, soronként 2 van, azaz összesen $2 \times 2 = 2^2$. Végül az $n \times n$-es négyzetből 1 darab van, és ezzel megkaptuk, hogy az $n \times n$-es látható négyzetek száma

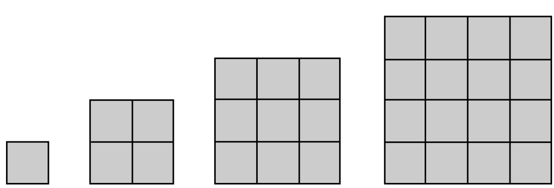
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A megoldás során szintetikusan is gondolkodhattunk volna, például így: Jelöljünk ki a négyzetrács bal felső sarkában egy $k \times k$ nagyságú négyzetet. Ezt a négyzetet egyesével $(n-k)$-szor lehet jobbra léptetni a négyzetrács jobb oldalának az eléréséig. Ha ehhez a számhoz hozzáadjuk a kezdeti 1 pozíciót, akkor megvan a vízszintesen megszámlálható négyzetek száma éppen $(n-k+1)$. Mivel négyzetrácsról van szó, ezért függőlegesen, az oszloponként is ugyanennyi van. Innen adódok tehát, hogy az összes látható négyzetek száma:

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^2 = n^2 + (n-1)^2 + ... + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezek után nézzük az (1)-hez nagyon hasonló, következő logikai feladványt!

(2)



1 9 36 ?

Milyen szám talál a kérdőjel helyére? Indokold meg a válaszodat!

Hosszabb-kevesebb gondolkodás után rájöhetünk, hogy az előző feladatban levő 5-ös helyett most azért van 9-es, mert még hozzáadódik 4. Vajon ez mi lehet? Belátható, hogy a (2)-es ábrasor 2. rajzán még 4 téglalap is látható. Innen adódik az ötletünk, hogy ezúttal ne csak a négyzeteket számoljuk össze, hanem a látható téglalapokat! (a négyzet is téglalap). Itt is, ha jól megfigyeljük az 1, 9, 36 számsorozatot, okoskodhatunk egy kicsit. Felírhatjuk, hogy: $9 = 3^2 = (1+2)^2$, $36 = 6^2 = (1+2+3)^2$ és ha ez így folytatódna, akkor a kérdőjel helyére $(1+2+3+4)^2 = 10^2 = 100$ kellene. Ez tehát a negyedik rajzon látható téglalapok száma, amit módszeres számlálással, de nyilván hosszabb idő alatt, analitikusan is megkaphatunk. Ennek alapján könnyen megfogalmazhatjuk a feladvány általánosítását $n \times n$ kisnégyzetre.

2. feladat. Legyen n≥1 természetes szám. Egy négyzetet, az oldalakkal párhuzamos vonalakkal felosztunk $n \times n$ kisnégyzetre. Hány téglalap látható ezen az ábrán?

Ezúttal két különböző megoldást is mutatunk.

1. megoldás. Az alakzat szimmetriája miatt elegendő a téglalapok átlóit az összeszámolni. Az $n \times n$-es felosztású négyzetben (a kerületét is beleértve) összesen $(n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$ rácspont van, amelyekből átlók indulnak ki. Egy rácspontból összesen $n \times n = n^2$ átló húzható, mert a saját sorában és oszlopában levő végpontok kivételével bármelyik végponttal összeköthető. Ezért $(n+1)^2 \times n^2$ az átlók számának a kétszerese, így hát $n^2(n+1)^2/2$ téglalapátló van. Mivel minden téglalapnak két átlója van, azért az ábrán látható téglalapok száma $n^2(n+1)^2/4 = (n(n+1)/2)^2$. Ha figyelembe vesszük, hogy $1+2+3+...+(n-1)+n = n(n+1)/2$, akkor máris összhangba jutunk a (2)-es feladvány megoldásával.

2. megoldás. Minden téglalapot úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a „kis téglalapok" két-két párhuzamos oldalát. A „függőleges" oldalpárokat $(n+1)$ egyenes közül választhatjuk ki. Az $(n+1)$ egyenesből 2 egyenest C_{n+1}^2 módon lehet kiválasztani. Ugyancsak C_{n+1}^2 módon választható ki a téglalap két „vízszintes" oldalpárja is. Összesen tehát $C_{n+1}^2 \times C_{n+1}^2 = (C_{n+1}^2)^2 = (n(n+1)/2)^2$ téglalap látható az ábrán.

Érdekes összefüggés az, hogy

$$(1+2+3+...+(n-1)+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3,$$

ami később is előkerül.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha a (2)-es ábra rajzain a négyzet helyett mind téglalapokat veszünk, akkor is igaz marad a 2. feladat állítása és megoldásai.

A továbbiakban gondolkozzunk el, hogy az 1.-2. feladatok miként általánosíthatók tovább is a feladatokban szereplő adatok változtatásával.

Az 1. feladat általánosítása céljából a négyzet helyett tekinthetünk egy $a \times b$ méretű téglalapot, és azt osszuk fel kisnégyzetekre. Ekkor az általánosabb feladat így néz ki:

3. feladat. Legyenek $n \geq 1, a, b$ természetes számok. Egy $a \times b$ méretű téglalapot az oldalakkal párhuzamos vonalakkal felosztunk $a \times b$ kisnégyzetre. Hány négyzet látható az ábrán?

Megoldás. a megoldás végett ezúttal is alkalmazható az 1. feladatra adott szintetikus megoldás, miszerint ha kijelöljük a téglalaprács bal felső sarkában egy $k \times k$ nagyságú négyzetet, ezt egyesével (n-a)- szor lehet léptetni jobbra, tehát az eredetivel együtt (n-a+1) négyzetünk van. Teljesen hasonlóan lefele (n-b+1) négyzetünk lesz. Ezért a látható négyzetek száma éppen $\sum_{k=1}^{n}(a-k+1)(b-k+1)$. Amennyiben $a = b = n$, úgy visszakapjuk az 1. feladatot.

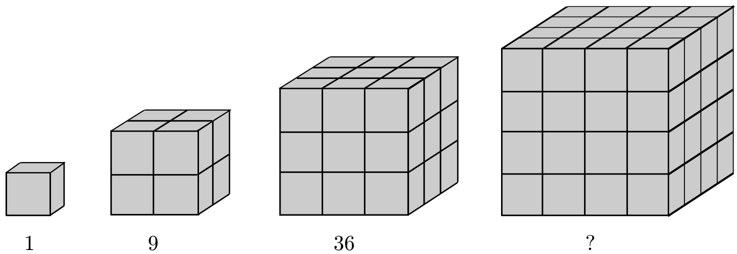
A 2. feladat általánosítása céljából ezúttal is tekintsünk egy egy $a \times b$ méretű téglalapot, és azt osszuk fel kisnégyzetekre. Ekkor az általánosabb feladat így néz ki:

4. feladat. Legyenek $n \geq 1, a, b$ természetes számok. Egy $a \times b$ méretű téglalapot az oldalakkal párhuzamos vonalakkal felosztunk $a \times b$ kisnégyzetre. Hány téglalap látható az ábrán?

Megoldás. Követhető a 2. feladatnak akármelyik megoldása, de talán rövidebb és átláthatóbb a második megoldása, miszerint minden téglalapot úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a „kis téglalapok” két-két párhuzamos oldalát. A „függőleges” oldalpárokat $(b+1)$ egyenes közül választhatjuk ki. A $(b+1)$ egyenesből 2 egyenest C_{b+1}^{2} módon lehet kiválasztani. Hasonlóan C_{a+1}^{2} módon választható ki a téglalap „vízszintes” oldalpárja is. Összesen tehát $C_{a+1}^{2} \times C_{b+1}^{2} = \frac{a(a+1)}{2} \cdot \frac{b(b+1)}{2}$ téglalap látható az ábrán. Amennyiben $a = b = n$ akkor visszakapjuk a 2. feladatot.

Nézzük most az eddigi feladatok más irányú általánosításait, pontosabban a térbeli analógjaikat. Ebből a célból a négyzet helyett kockát, a téglalap helyett hasábot kell vennünk. Fogalmazzuk meg előbb a logikai feladványok térbeli analógjait:

(3)



Milyen szám talál a kérdőjel helyére? Indokold meg a válaszodat!

A megoldás céljából vegyük észre, hogy az ábrán pontosan ugyanazok a számok szerepelnek, mint a (2)-es feladványnál, noha a két feladványnak nem sok köze van egymáshoz, hiszen a (2)-nél téglalapokat kell megszámolni, itt pedig kockákat. Mégis egyértelmű, hogy a kérdőjel helyére ezúttal is 100 talál. Ezúttal a számok, az ábrán látható kockák számát jelölik. Nézzük tehát a feladvány általánosítását:

5. feladat. Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Egy kockát, a lapokkal párhuzamos skokkal felosztunk $n \times n \times n$ kiskockára. Hány kocka látható az ábrán?

Megoldás. Ezúttal is követhetjük az 1. feladat megoldását, de most ennek térbeli változatáról van szó: Jelöljünk ki a kockarács bal felső sarkában egy $k \times k \times k$ nagyságú kockát. Ezt a kockát egyesével $(n-k)$-szor lehet jobbra léptetni a kockarács jobb oldalának az eléréséig. Ha ehhez a számhoz hozzáadjuk a kezdeti 1 pozíciót, akkor megvan a vízszintesen megszámlálható kockák száma éppen $(n-k+1)$. Mivel kockarácsról van szó, ezért függőlegesen, oszloponként is ugyanennyi van. Sőt a harmadik dimenzió szerint is ugyanígy van. Innen adódik tehát, hogy az összes látható kockák száma:

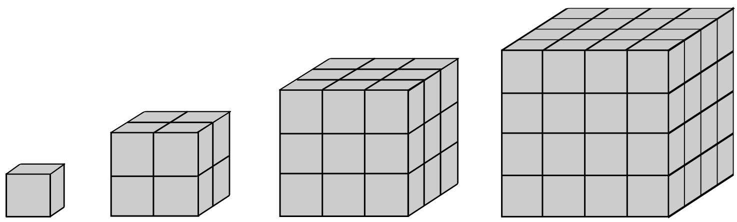
$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^3 = n^3 + (n-1)^3 + ... + 2^3 + 1^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Most már bizonyára érthető, hogy miért áll fenn a számbeli megegyezés a 2. feladat és a 4. feladat között. Ennek egyetlen magyarázata a következő összefüggés:

$$(1+2+3+...+(n-1)+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3.$$

Nézzük a továbbiakban a (2) logikai feladvány térbeli analógját:

(4)



Milyen szám talál a kérdőjel helyére? Indokold meg a válaszodat! A számok közötti összefüggések alapján most is megsejthetjük a hiányzó számot:

$$1 = 1^3, \quad 27 = 3^3 = (1+2)^3, \quad 216 = 6^3 = (1+2+3)^3$$

Ez alapján azt sejthetjük, hogy a negyedik szám $(1+2+3+4)^3 = 10^3 = 1000$. A feladatot általánosítjuk $n \times n \times n$ kiskockára, és ezt bizonyítjuk.

6. feladat. Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Egy kockát a lapokkal párhuzamos síkokkal felosztunk $n \times n \times n$ kiskockára. Hány téglatest „látható" az ábrán?

Megoldás. ezúttal a 2. feladat megoldásainak térbeli változatát kell végrehajtanunk. Mind a két megoldás átültethető térbe is, de talán rövidebb a második megoldás. Ennek alapján minden téglatestet úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a „kis téglatestek" két-két párhuzamos oldallapját. A „függőleges" oldallappárokat $(n+1)$ sík közül választhatjuk ki. Az $(n+1)$ síkból 2 síkot C_{n+1}^2 módon lehet kiválasztani. Ugyancsak C_{n+1}^2 módon választható ki a téglatest két „vízszintes" oldallapját is. Továbbá hasonló a helyzet a harmadik dimenzió szerint is. Összesen tehát

$$C_{n+1}^2 \times C_{n+1}^2 \times C_{n+1}^2 = \left(C_{n+1}^2\right)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$$

téglatest látható az ábrán. Ezért az (5) feladványban a kérdőjel helyére $\left(\frac{4\times 5}{2}\right)^3 = 10^3 = 1000$ a találó szám.

És még itt sincs vége az általánosításoknak, ugyanis a 5. feladat és a 6. feladatban a kocka helyett tekinthetünk egy $a \times b \times c$ méretű téglatestet, és abban számoljuk meg a felosztás után keletkezett kockákat illetve téglatesteket. Így hát megfogalmazhatók a következő feladatok:

7. feladat. Legyenek $n \geq 1$, és a, b, c természetes számok. Egy $a \times b \times c$ méretű téglatestet az oldallapokkal párhuzamos síkokkal felosztunk $a \times b \times c$ darab kis kockára. Hány kocka „látható" az ábrán?

Megoldás.. Ismét a 5. feladat bizonyítását kell kövessük, és könnyen belátható, hogy ezúttal a látható kis kockák száma éppen $\sum_{k=1}^{n}(a-k+1)(b-k+1)(c-k+1)$, és amennyiben $a=b=c=n$ úgy visszakapjuk az 5. feladatot.

8. feladat. Legyenek $n \geq 1$, és a, b, c természetes számok. Egy $a \times b \times c$ méretű téglatestet az oldallapokkal párhuzamos síkokkal felosztunk $a \times b \times c$ darab kis kockára. Hány téglatest „látható" az ábrán?

Megoldás. Ezúttal a 6. feladat bizonyítását kell átültetnünk térbe, és könnyűszerrel látható, hogy a keletkezett kis téglatestek száma

$$C_{a+1}^{2} \times C_{b+1}^{2} \times C_{c+1}^{2} = \frac{a(a+1)}{2} \cdot \frac{b(b+1)}{2} \cdot \frac{c(c+1)}{2}.$$

Az is könnyen belátható, hogy ha $a=b=c=n$ akkor visszakapjuk a 6. feladatot.

Végezetül figyeljük meg, hogy az 1. feladatnál a látható négyzetek száma éppen

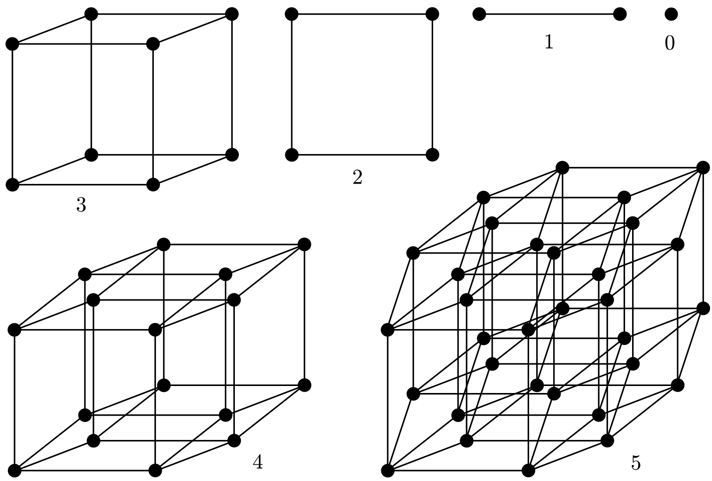
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A 6. feladatnál „látható" kockák száma

$$1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

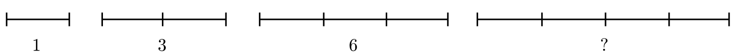
A két feladat abban hasonlít egymáshoz, hogy lényegében a kocka a négyzetnek a térbeli megfelelője, míg a négyzet síkbeli szabályos négyszög, addig a kocka a térbeli szabályos test amelynek minden lapja négyzet. Ezért hát elképzelhető a két feladat további általánosítása amikor a két- és három dimenzióból az m-edik dimenzióba megyünk át.

Tekintsük tehát az m-dimenziós hiperkockát. Ez egy olyan konvex alakzat, amelynek bármely két éle egyforma hosszú, és vagy párhuzamos vagy merőleges egymásra. Az
m-dimenziós hiperkocka előáll 2m-darab (m-1) dimenziós hiperkocka összeillesztésével. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 dimenziójú hiperkockák a következő ábrán láthatók:



Mivel az 1-dimenziós hiperkocka egy szakasz, ezért az (1) logikai feladvány 1-dimenziós változata ez lenne:

(5)



Milyen szám talál a kérdőjel helyére? Indokold meg a válaszodat!

Könnyen belátható, hogy a számok az illető szakaszon levő szakaszok számát jelöli, ezért a kérdőjel helyére 10 talál. Ennek alapján megfogalmazható a feladvány általánosítása is:

9. feladat. Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Egy szakaszt osszunk fel n darab egyenlő szakaszra. Hány szakasz látható az ábrán?

Megoldás. Könnyen látható, hogy 1 kisszakaszból álló szakaszból n darab van, 2 kisszakaszból álló szakaszból $(n-1)$ darab van, és így tovább, $(n-1)$ kis szakaszból álló szakaszból 2 van, míg n kis szakaszból álló szakaszból 1 van, tehát a látható szakaszok száma: $1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Végül térjünk rá az 1. feladat, az 5. feladat és a 9. feladat általánosítására $m>3$ dimenzió esetén:

10. feladat Legyenek $n, m \geq 1$ természetes számok. Egy m-dimenziós hiperkockát az „oldallapokkal" párhuzamos „hipersíkokkal" felosztunk egymással egybevágó m-dimenziós kis hiperkockára. Hány m-dimenziós hiperkocka „látható" az ábrán?

Megoldás. Az 1. feladat bizonyítását követve ezúttal

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + ... + (n-1)^m + n^m = \sum_{k=1}^{n} k^m$$

darab m-dimenziós hiperkocka lesz látható.

Érdemes megfigyelni, ahogy az eredeti feladvány feltételeinek, adatainak megváltoztatásával hogyan jutottunk új problémákhoz. Ezzel befejezzük a kalandozásunkat a logikai feladvány általánosítása kapcsán. Reméljük, hogy a témakör érdekes és tanulságos volt.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely