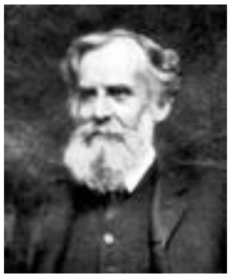
# Ismerkedés a Venn-Euler diagramokkal

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az ábráknak nemcsak a geometriában van fontos szerepük, hanem a legkülönbözőbb feladatok megoldásában is segíthetik a kiindulási adatok elrendezését, összefüggések felismerését, megkönnyíthetik a feltárt összefüggések későbbi felidézését és ellenőrzését, maga a feladat megoldását.

Az ábrák egyik speciális kategóriája a diagrammok. Ezek két, vagy több változómennyiség közötti összefüggést fejezik ki, koordináta rendszerben, grafikus formában. A diagramok közül a leg ismertebbek az Euler-diagramok (v.ö.: [5]) és a Venn diagramok (v.ö.: [6]). Ezeket közös néven halmazábráknak is nevezik, mivel halmazok viszonyait, számosságát (elemeinek a számát) és műveleteit szemlélteti. Többnyire síkidomokat (köröket, ellipsziseket, háromszögeket, négyszögek, egyéb konvex vagy konkáv alakzatokat), általánosabban zárt görbéket használnak.



Először Leonhard Euler (1707- 1783) svájci matematikus használta, majd John Venn (1834-1923) brit matematikus népszerűsítette 1880-ban a Symbolic Logic című művében (v.ö.: [7]). Ezeket használják az elemi halmazelmélet tanításában, a logikában, valószínűségszámításban, statisztikában, illetve a nyelvészetben. Általában csak néhány halmaz szemléltetésére alkalmas, mivel sok egymást kölcsönösen metsző halmaz esetén az ábra elbonyolódik, vagy nem is lehetséges az összes metszetet ábrázolni. A képen John Venn látható.

Ezeket a halmazokat általánosabban zárt görbékkel értelmezzük. Minden görbe belseje valamilyen halmazt ábrázol, a zárt görbén kívül eső rész pedig annak komplementerét.

Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ görbecsaládot *Venn-diagramnak* nevezzük, ha a görbék a síkot pontosan $2^n$ diszjunkt tartományra bontják, és a tartományok megegyeznek az összes lehetséges $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \ldots \cap X_k$ alakú halmazzal, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ahol minden $X_i$ helyére az $A_i$ egyszerű, zárt görbe belsejét vagy külsejét írhatjuk, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Az *Euler-diagramok* abban különbözik a Venn-diagramtól, hogy nem tartalmazza az összes lehetséges $2^n$ tartományt (úgymond atomot).

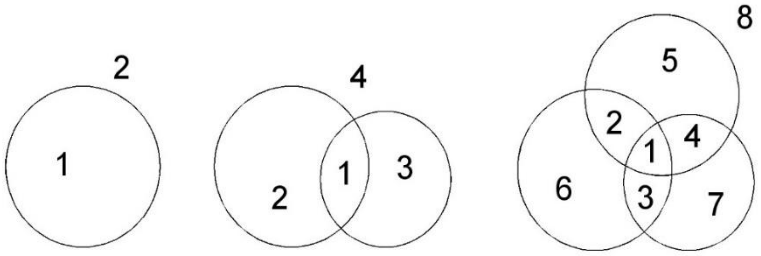
Először is nézzük meg, hogy a Venn-diagramban miért is van az, hogy a tartományok (atomok) száma éppen $2^n$, hiszen esetenként ez lehet kevesebb vagy éppen több is.

*1.* **segédfeladat:** Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma pontosan $2^n$-nel egyenlő!

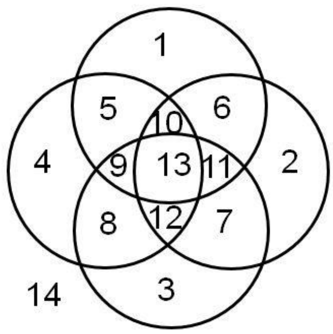
Bizonyítás: Tekintsük az $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$ halmazt, amelynek n eleme van. A 0 elemű halmazból (az üres halmazból) $1 = C_n^0$ darab van. Az 1 elemű halmazokból éppen $n = C_n^1$ darab van, a 2 elemű halmazokból $C_n^2$ darab, a 3 eleműekből $C_n^3$ darab van, és így tovább, az n-1 eleműekből $C_n^{n-1}$, továbbá az n eleműből $1 = C_n^n$. Ezért tehát az összes részhalmazok száma $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$ ami éppen az $(1+1)^n = 2^n$ kifejtése a Newton binomiális képlettel.

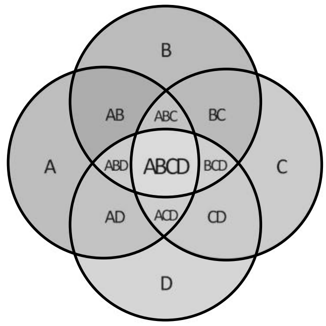
Tehát a Ven-diagrammok azok az Euler-diagramok, amelyeknél minden $X_i$ , $X_i \cap X_j$ , $X_i \cap X_j \cap X_k$ , ..., $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \ldots \cap X_k$ tartomány létezik, és az előző segédfeladat alapján ezen tartományok száma éppen $2^n$.

Már Euler és Venn idejében is felmerült a kérdés, hogyan is lehet különféle alakzatokkal Venn-diagramokat szerkeszteni, különböző számú alakzatok esetén. Leghamarabb a körrel próbálkoztak, n=1, n=2, n=3 esetekben. Íme az így kapott Venn-diagramok:




Belátható, hogy valóban Ven-diagramok, mert n= 1, 2, 3 eseteben a síkot rendre $2^1$, $2^2$, $2^3$ tartományra (atomra) bontják. Ezután azzal próbálkoztak, hogy n= 4 körrel is ilyen Ven-diagramot szerkesszenek, amelyik tehát a síkot $2^4 = 16$ részre ossza. Megrajzolták tehát azt a 4 kört tartalmazó halmazábrát, ahol a tartományok száma a legnagyobb, ez így néz ki:

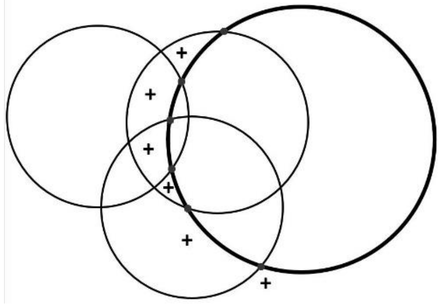



Meglepődve látjuk, hogy nincs meg a 16 tartomány, hiányzik 2 tartomány, és a köröket nem lehet úgy elhelyezni, hogy ennél több tartomány keletkezzen, mert már maximális számú pontban metszik egymást. Valóban, hiányzik az a 2 tartomány amely a két-két átlósan elhelyezkedő körnek éppen az a tartománya amelyik csak a két körnek a közös része, vagyis a BD és az AC tartományok. Ennek láttán még Venn idejében felmerült az a kérdés, hogy vajon n> 3 darab körrel, szerkeszthető-e Venn-diagram? Mielőtt erre válaszolnánk, nézzük a következő segédfeladatot:

*2.* **segédfeladat**: Adott n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja.(v.ö.: [3], [6])

Bizonyítás: Az állítást a matematikai indukció módszerével bizonyítjuk. Az n= 1 kör esetén a már bemutatott ábra szerint az 1 kör a síkot $2^1 = 2 = 1^2 - 1 + 2$ részre osztja, továbbá 2 kör éppen $2^2 = 4 = 2^2 - 2 + 2$ részre, 3 kör pedig $2^3 = 8 = 3^2 - 3 + 2$ részre. Jelöljük $t_n$ -el az n kör esetén keletkezett maximális tartományok számát. Ekkor feltételezzük, hogy k kör a síkot legfeljebb $t_k$ részre osztja. A (k+1)-ik kör megrajzolásakor az előző körökkel 2k metszéspontot kapunk, s mindegyikhez tartozik egy új tartomány.




(Az ábrán a 3-ról a 4 körre való lépést szemléltettük, + jellel jelöltük az új tartományokat).

Ezért hát felírható, hogy $t_{k+1} \le t_k + 2k$ minden $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ esetén.

Ha most összegezzük ezeket az egyenlőtlenségeket k=1-től, k= (n-1)-ig, akkor azt kapjuk, hogy:

$t_n \le t_1 + 2(1+2+3+...+(n-1)) = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2$ . A szélsőhelyzet el is érhető. Tetszőleges n esetén megadhatunk n darab kört úgy, hogy bármely kettőnek két metszéspontja legyen. Pl. egy adott kört rögzített irányban (n – 1)-szer „kissé” eltolunk. Ha az első és utolsó kör középpontjának távolsága kisebb, mint a kör sugara, akkor mindegyik kör metszi mindegyik kört, különböző pontokban. Vagyis amit éppen bizonyítani akartunk.

Tekintsük most a következő segédfeladatot:

*3.* **segédfeladat**: Igazoljuk, hogy minden $n \ge 4$ természetes számra $2^n > n^2 - n + 2$ .

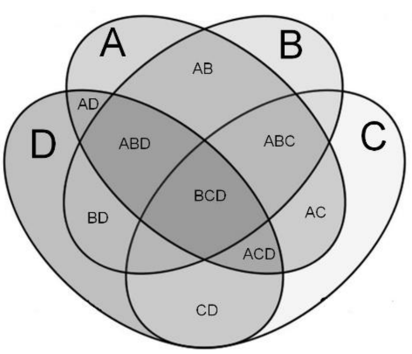
Bizonyítás: Ezúttal is teljes indukcióval bizonyítunk. Az n= 4 esetén $16 = 2^4 > 4^2 - 4 + 2 = 14$ igaz. Feltételezzük, hogy $2^k > k^2 - k + 2$ is igaz, és bizonyítjuk, hogy $2^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$ is igaz. Valóban, a feltételből kiindulva kapjuk, hogy $2^{k+1} > 2(k^2 - k + 2)$, így elegendő ellenőrizni, hogy $2(k^2 - k + 2) \ge (k+1)^2 - (k+1) + 2$ ami azt jelenti, hogy $k(k-3) + 2 \ge 0$ ami igaz mert $k \ge 4$ .

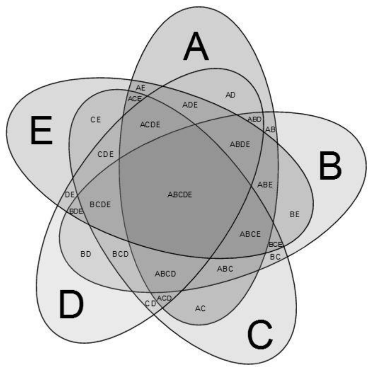
Ezzel már megfogalmazhatjuk azt az eredményt, ami Venn munkájából is kitűnik:

1. **Tétel**: Csupa körökből álló Venn-diagram nem tartalmazhat háromnál több kört.

Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $n \ge 4$ kör esetén is tudunk szerkeszteni csupa körökből álló Venn diagramot. Ezek tehát a síkot $2^n$ részre osztják. Másfelől a 2. segédfeladat alapján az n kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja . Ez azt jelentené, hogy $2^n = n^2 - n + 2$ , valamilyen $n \ge 4$ esetén, ez azonban ellentmond a 3. segédfeladat állításának. Tehát csupa körökből álló Venn diagrammot csakis $n \in \{1,2,3\}$ esetén lehet szerkeszteni. Az n= 4 estén csak Euler-diagramot.

Továbbvíve a gondolatmenetet, az az ötletünk támadhat, hogy cseréljük ki a köröket ellipszisekre, hátha így szerencsésebb a helyzetünk. Erre főleg az ösztökélt, hogy a neten megtaláltam a következő ábrákat, az utóbbi Branko Grünbaumtól származik (v.ö.: [9], [10]):




Az első esetben 4 ellipszis látható (A, B, C, D) és szemléltettük az összes atomot is, amelyekből éppen $2^4 = 16$ van. A második esetben 5 ellipszis van (A, B, C, D, E) és itt is szemléltettük az összes atomot, amelyekből ezúttal $2^5 = 32$ van. Tehát a körökkel ellentétben, n= 4 és n= 5 esetben csupa ellipszisekkel megszerkesztettünk egy- egy Venn-diagramot. Nyilván azonnal felmerül a kérdés, hogy mivel magyarázható, hogy 4 körrel nem, de 4 ellipszissel már szerkeszthető Venn-diagram? A magyarázat egyszerű: míg 2 kör legfeljebb 2 pontban metszi egymást, addig 2 ellipszis legfeljebb 4 pontban! Innen adódik, hogy az ellipszisekkel több tartományt állíthatunk elő mint körökkel.

Ugyanakkor természetesen merül fel az a kérdés is, hogy vajon $n \ge 6$ esetben szerkeszthető e csupa ellipszisekből álló Venn-diagram? Mielőtt erre válaszolnánk, nézzük a következő segédfeladatot.

*4.* **segédfeladat**: Adott n ellipszis a síkot legfeljebb $2(n^2 - n + 1)$ részre osztja.

Bizonyítás: Teljesen követhető a 2. segédfeladat bizonyítása, ahol a módosítások a következők: $t_{k+1} \le t_k + 4k$, ahonnan $t_n \le t_1 + 4(1+2+3+...+(n-1)) = 2 + 2n(n-1) = 2(n^2 - n + 1)$.

*5.* **segédfeladat**: Igazoljuk, hogy minden $n \ge 6$ természetes számra $2^{n-1} > n^2 - n + 1$.

Bizonyítás: Ezúttal is teljes indukcióval bizonyítunk. Az n= 6 esetén $32 = 2^5 > 6^2 - 6 + 1 = 31$ igaz. Feltételezzük, hogy $2^{k-1} > k^2 - k + 1$ is igaz, és bizonyítjuk, hogy $2^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$ is igaz. Valóban, a feltételből kiindulva kapjuk, hogy $2^k > 2(k^2 - k + 1)$, így elegendő ellenőrizni, hogy $2(k^2 - k + 1) \ge (k+1)^2 - (k+1) + 1$ ami azt jelenti, hogy $k(k-3) + 1 \ge 0$ ami igaz mert $k \ge 6$.

Most tehát megfogalmazhatjuk az ellipszisekkel kapcsolatos eredményünket:

2. **Tétel**: Csupa ellipszisekből álló Venn-diagram nem tartalmazhat ötnél több ellipszist.

Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $n \ge 6$ ellipszis esetén is tudunk szerkeszteni csupa ellipszisekből álló Venn diagramot. Ezek tehát a síkot $2^n$ részre osztják. Másfelől az 4. segédfeladat alapján az n ellipszis a síkot legfeljebb $2(n^2 - n + 1)$ részre osztja. Ez azt jelentené, hogy $2^n = 2(n^2 - n + 1)$, vagyis $2^{n-1} = n^2 - n + 1$ valamilyen $n \ge 6$ esetén, ez azonban ellentmond az 5. segédfeladat állításának. Tehát csupa ellipszisekből álló Venn diagrammot csakis $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén lehet szerkeszteni, és ezek meg is szerkeszthetők.

Megfigyelve, hogy két ellipszis legfeljebb 4 pontban metszi egymást, mivel két háromszög legfeljebb 6 pontban metszi egymást ezért nézzünk háromszögekből álló Venn-diagramokat is:

*6.* **segédfeladat**: Adott n háromszög a síkot legfeljebb $3n^2 - 3n + 2$ részre osztja.

Bizonyítás: Teljesen követhető a 2. és 4. segédfeladat bizonyítása, ahol a módosítások a következők: $t_{k+1} \le t_k + 6k$, ahonnan $t_n \le t_1 + 6(1+2+3+...+(n-1)) = 2 + 6n(n-1) = 3n^2 - 3n + 2$.

*7.* **segédfeladat**: Igazoljuk, hogy minden $n \ge 8$ természetes számra $2^n > 3n^2 - 3n + 2$.

Bizonyítás: Ezúttal is teljes indukcióval bizonyítunk. Az n= 8 esetén $256 = 2^8 > 3 \cdot 8^2 - 3 \cdot 8 + 2 = 170$ igaz. Feltételezzük, hogy $2^k > 3k^2 - 3k + 2$ is igaz, és bizonyítjuk, hogy $2^{k+1} > 3(k+1)^2 - 3(k+1) + 2$ is igaz. Valóban, a feltételből kiindulva kapjuk, hogy $2^{k+1} > 2(3k^2 - 3k + 2)$, így elegendő ellenőrizni, hogy $2(3k^2 - 3k + 2) \ge 3(k+1)^2 - 3(k+1) + 2$ ami azt jelenti, hogy $3k(k-3) + 2 \ge 0$ ami nyilvánvalóan igaz mert $k \ge 8$.

Most tehát megfogalmazhatjuk a háromszögekkel kapcsolatos eredményünket:

3. **Tétel**: Csupa háromszögekből álló Venn-diagram nem tartalmazhat hétnél több háromszöget.

Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $n \ge 8$ háromszög esetén is tudunk szerkeszteni csupa háromszögekből álló Venn diagramot. Ezek tehát a síkot $2^n$ részre osztják. Másfelől az 6. segédfeladat alapján az n háromszög a síkot legfeljebb $3n^2 - 3n + 2$ részre osztja. Ez azt jelentené, hogy $2^n = 3n^2 - 3n + 2$ valamilyen $n \ge 8$ esetén, ez azonban ellentmond az 7. segédfeladat állításának. Tehát csupa háromszögekből álló Venn diagrammot csakis $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ esetén lehet szerkeszteni, az n= 7 felső határ nem érhető el (v. ö. [11]). A többi elérhető, ábrák a dolgozat végén.

Most már, hogy láttuk a kör, ellipszis, háromszög esetét természetesen merül fel a kérdés, hogy egyre nagyobb n esetén, milyen alakzatokkal szerkeszthetők Venn-diagramok?

Mivel 2 háromszög legfeljebb 6 pontban metszik egymást, és mivel 2 négyszög (akár konvex, akár konkáv) legfeljebb 8 pontban metszik egymást, ezért megfogalmazhatók:

*8.* **segédfeladat**: Adott n négyszög a síkot legfeljebb $2(2n^2-2n+1)$ részre osztja.

Bizonyítás: Teljesen követhető a 2. 4. és a 6. segédfeladat bizonyítása, ahol a módosítások a következők: $t_{k+1} \le t_k + 8k$, ahonnan $t_n \le t_1 + 8(1+2+3+...+(n-1)) = 2+4n(n-1) = 2(2n^2-2n+1)$.

*9.* **segédfeladat**: Igazoljuk, hogy minden $n \ge 8$ természetes számra $2^{n-1} > 2n^2-2n+1$.

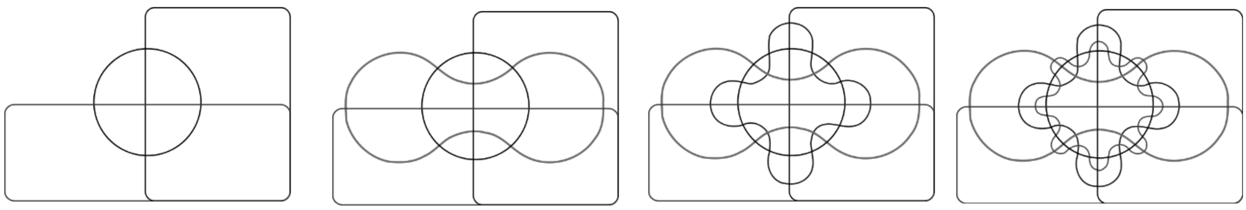
Bizonyítás: Ezúttal is teljes indukcióval bizonyítunk. Az n= 8 esetén $128 = 2^7 > 2\cdot 8^2 - 2\cdot 8 + 1 = 113$ igaz. Feltételezzük, hogy $2^{k-1} > 2k^2-2k+1$ is igaz, és bizonyítjuk, hogy $2^{k+1} > 2(k+1)^2-2(k+1)+1$ is igaz. Valóban, a feltételből kiindulva kapjuk, hogy $2^k > 2(2k^2-2k+1)$, így elegendő ellenőrizni, hogy $2(2k^2-2k+1) \ge 2(k+1)^2-2(k+1)+1$ ami azt jelenti, hogy $2k(k-3)+1 \ge 0$ ami nyilvánvalóan igaz, mert $k \ge 8$.

4. **Tétel**: Csupa négyszögekből álló Venn-diagram nem tartalmazhat hétnél több négyszöget.

Bizonyítás: Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy $n \ge 8$ négyszög esetén is tudunk szerkeszteni csupa négyszögekből álló Venn-diagramot. Ezek tehát a síkot $2^n$ részre osztják. Másfelől az 8. segédfeladat alapján az n négyszög a síkot legfeljebb $2(2n^2-2n+1)$ részre osztja. Ez azt jelentené, hogy $2^{n-1} = 2n^2-2n+1$ valamilyen $n \ge 8$ esetén, ez azonban ellentmond az 9. segédfeladat állításának. Tehát csupa négyszögekből álló Venn-diagrammot csakis $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ esetén lehet szerkeszteni. A felső határ el is érhető (v. ö. : [11]).

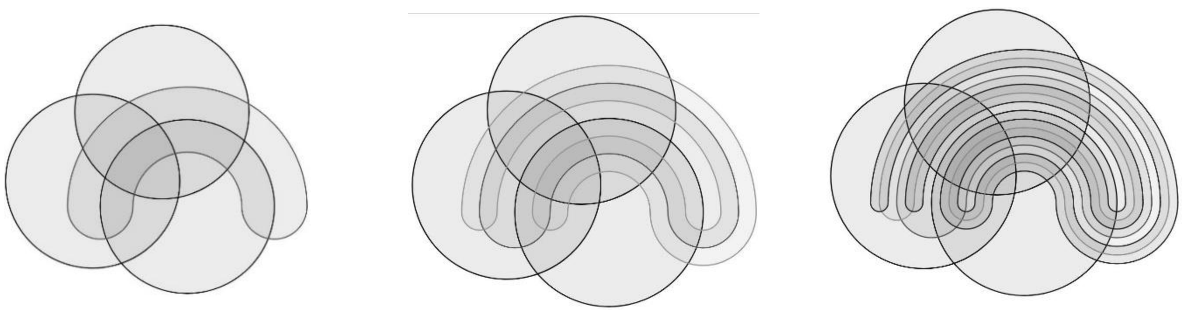
Az előzőekben láttuk, hogy a fontosabb elemi alakzatokkal milyen esetekben szerkeszthetők Ven-diagramok. természetesen merül fel az a kérdés, hogy ezen alakzatokon kívül (amelyeknek megvannak a maga korlátai), milyen alakzatokkal tudnánk olyan Venn-diagramot szerkeszteni, amikor **a szerkesztési menet öröklődik**? Erre nem könnyű a válasz, de beidézzük két matematikus munkáját:

1) Anthony William Fairbank Edwards konstrukciói (vö. [4]):



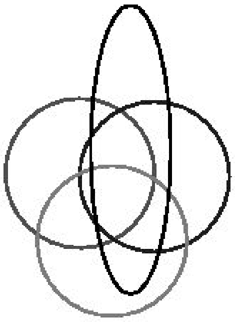
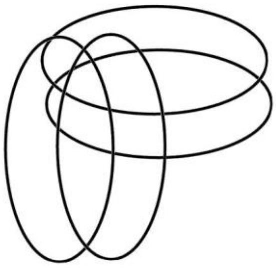
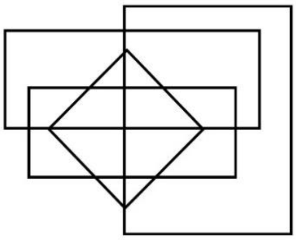
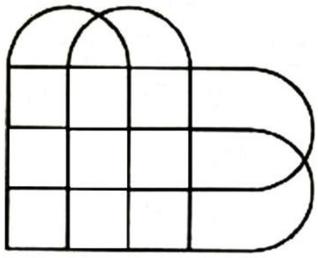
Ezek az öröklődéses ábrák $n \in \{3,4,5,6\}$ esetre készültek. Edwards a Venn-diagramot a gömbfelszínen készíti el, majd kivetíti a síkba. Az első három halmazt három egymást metsző főkör határolja, a negyediké meg úgy kanyarog, mint teniszlabdán a varrat. A visszavetítés után fogaskerék alakú halmazok keletkeznek, ahol minden egyes további halmaznak egyre több foga van.

2) Venn konstrukciói (vö. [4]):

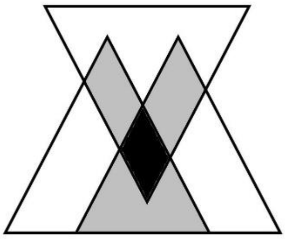
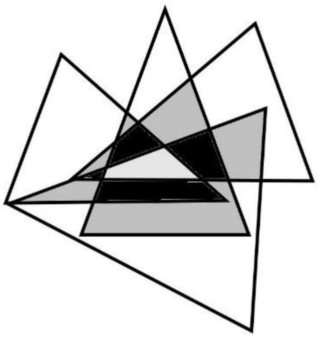
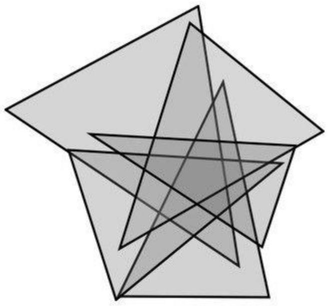
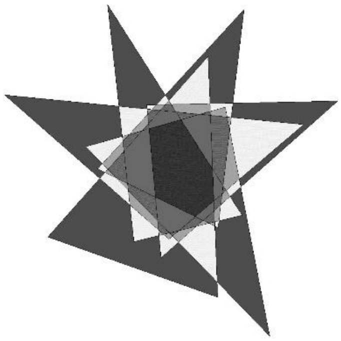


Ezek a konstrukciók $n \in \{4,5,6\}$ esetre készültek, mintegy folytatva a 3 kör esetét egy másik alakzattal.

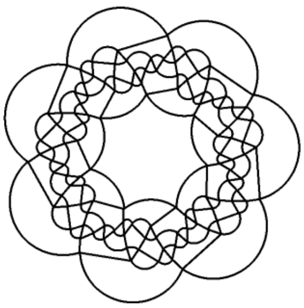
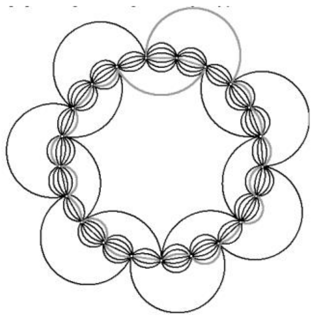
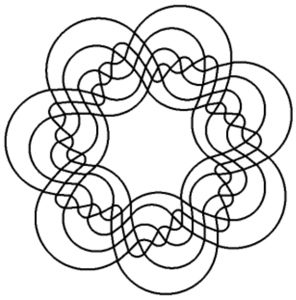
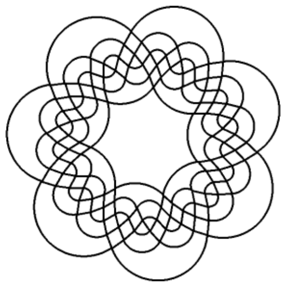
Továbbá nézzünk még néhány érdekes 4-Venn-diagramot:

Az első azért érdekes, mert 4 körrel nem lehetett 4-Venn-diagramot előállítani, de 3 körrel és egy ellipszissel már lehet. A másodikat maga Venn készítette. Nézzünk még néhány Venn-diagramot csak háromszögekből:

És néhány érdekes polárszimmetrikus 7-Venn-diagram, különféle görbékkel (v.ö.: [8]):

Befejezésül megemlítjük, hogy az elkövetkezőkben a MatLap hasábjain Péchy Zoltán Péter fogja bemutatni saját, eredeti konstrukcióit.


**Szakirodalom**:

[1] Tuzson Zoltán: A Venn-diagram és a logikai szita alkalmazásai, Polygon XXII. kötet 1-2. szám/2014
[2] Tuzson Zoltán: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2014
[3] Lehel Jenő: Feladatok a kombinatorikus geometriából, A Matematika Tanítása, 3/1983
[4] https://hu.wikipedia.org/wiki/Venn-diagram
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_diagram#History
[6] http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Rek/rek3.html
[7] https://archive.org/details/symboliclogic00venniala
[8] http://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennEJC.html
[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Branko_Gr%C3%BCnbaum
[10] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn%27s_four_ellipse_construction.png
[11] http://webhome.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/VennConvex/VennKgons.pdf