Vigyázat! A gondolataink fertőzhetnek!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A problémák megoldása során, nagyon sokszor kerülünk olyan helyzetbe, hogy több esetben is a feltételek, körülmények hasonlóak, és ilyenkor hasonló módszereket alkalmazhatunk, hasonló konklúziókat vonhatunk le. Ez képezi az analógiás gondolkodás lényegét, ami nélkülözhetetlen a matematikában. Például a $3\cdot 4^x - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 2\cdot 9^x = 0$ egyenletet és a $3\cdot\cos^2 x - 5\cdot\sin x\cdot\cos x + 2\cdot\sin^2 x = 0$ egyenletet teljesen hasonlóan oldjuk, meg, mert mindkettőre teljesül az, hogy másodfokú homogén, ezért végigosztunk a harmadik taggal és a $3y^2 - 5y + 2 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. De ezek mellett a diákok részéről megjelennek ilyen „találmányok” is, mint például: $m\cdot(b\cdot c) = (m\cdot b)\cdot(m\cdot c)$, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, $a+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, stb. Ha alaposan elgondolkodunk, akkor rájövünk, hogy az előző „képletek” valószínű, hogy rendre az $m\cdot(b+c) = (m\cdot b)+(m\cdot c)$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$, $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a\cdot b}$ igaz képletek mintájára jöttek létre. Mondhatjuk tehát, hogy gondolat béli „fertőzés” eredményei, helytelen tartalom és fogalomhasználat alapján, hamis analógiás következtetések.

Az analógiás gondolkodás gyakran társul induktív gondolatmenettel is, amikor lépésről-lépésre alakítjuk ki a gondolkodási sémánkat. Nézzünk egy példát, ami erre a két műveletre támaszkodik.

1. <u>példa</u>: Az (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ... számsorban milyen szám áll a 100. zárójelben az első helyen?

Vegyük jobban szemügyre a zárójelek első számait. Ezek a következők: 1, 2, 4, 7, 11, … . Próbáljunk valamilyen szabályszerűséget megállapítani ebben a számsorban. A felsorolt számok még így is írhatók: 1, 1+1+2, 1+1+2+3, 1+1+2+3+4,….vagyis még így is írhatók: $1,\ 1+\frac{1\cdot 2}{2},\ 1+\frac{2\cdot 3}{2},\ 1+\frac{3\cdot 4}{2},\dots$. Most már könnyen „leolvasható”, hogy a 100. zárójel első száma $1+\frac{99\cdot 100}{2} = 4951$ lesz.

2. <u>példa:</u> Az (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), … számsorban mennyi a 100. zárójelben levő számok összege?

Ha az előző példa gondolatmeneteit követjük, akkor a zárójelek első számai rendre 1, 3, 7, 13, 21, … amit még így is írhatunk: 1, 1+1×2, 1+1×2+2×2, 1+1×2+2×2+3×2, 1+1×2+2×2+3×2+4×2,…

Ezek szerint a 100. zárójel első száma 1+1×2+2×2+…+99×2 = 1+ 2×(1+2+3+…+99)= $=1+2\times\frac{99\cdot 100}{2} = 9901$. Továbbá megfigyelhető, hogy minden zárójelben annyi szám van, ahányadik a sorban. Ezért a 100. zárójel elemeinek az összege (9901+2) +(9901+4)+ (9901+6)+ …+(9900+200)= 1000000.

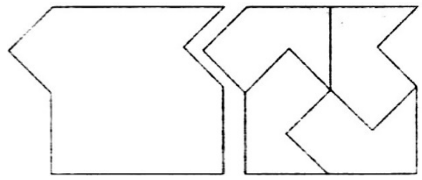
Noha megoldottuk a problémát, mégis sajnálattal taksálhatjuk, hogy a 2. példa megoldásának a gondolatmenetét nagyon „megfertőzte” az 1. példa megoldásának a gondolatmenete. Mindamellett, hogy a 2. példa esetén a számsor már más mint az 1. példa esetén, mégis ragaszkodtunk ahhoz, hogy most is szabályszerűség alapján megállapítsuk a 100. zárójel első számát, aztán ennek alapján kiszámítottuk a szóban forgó összeget.

Ez a gondolkodásbeli „fertőzés” nem volt végzetes, mert így is eredményhez jutottunk, de mint látni fogjuk, sokkal bonyolultabban mintha egy nem fertőzött gondolatmenetet követtünk volna. Érdemes megfigyelni, hogy a 2. példa esetén nem a 100. zárójel első elemét kellett meghatározni, hanem a 100. zárójelben levő elemek **<u>összegé</u>**t, tehát a kérelmek már változtak. Mi ellenben mégis megpróbáltunk az 1. példa mintájára gondolkodni. Ellenben érdemes félretenni az előbbi gondolatmenetet, és az új helyzethez mérten új gondolatmenetet alkalmazni, amit már nem fertőzött az 1. példa megoldásának a gondolat menete.

Természetes, hogy mielőbb vegyük szemügyre a zárójelekben levő számok összegét. Ezek rendre: 1, 8, 27, 64, … vagyis az $1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ ...$ köbszámok sorozatát kapjuk, így nyilvánvaló, hogy a 100. zárójel számainak az összege $100^3 = 1000000$, és ez a megoldás sokkal rövidebb is mint a „fertőzött” megoldás.

Nézzünk egy másik példát, amikor a fertőzés nem két különálló probléma esetén áll elő, hanem egyugyanazon problémán belül.

3. <u>példa</u>: A baloldali ábrát Félix négy egyforma részre szerette volna felosztani. Hosszas töprengés után ez sikerült is. A jobboldali ábrán látható egy megoldás:



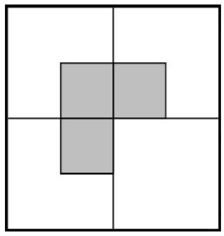
Hogyan tudnád az első ábrát öt egyforma részre felosztani?

Ha azt tartjuk szem előtt, hogy Félix milyen megoldást adott, akkor joggal gondolhatunk arra, hogy az 5 egyforma részre való felosztás a bemutatottnál még bonyolultabb kell legyen. Így amennyiben erre gondolunk, úgy a Félix megoldása máris „megfertőzte” a további gondolkodásunkat. Ha ellenben kíváncsiskodók lettünk volna, akkor felülvizsgáltuk volna Félix megoldását, hogy vajon van-e más, esetleg egyszerűbb megoldása a feladatnak? És bizony van, íme egy természetesebb megoldás, ami a baloldali ábrán látható:

Nos ennek alapján már könnyen rájöhetünk arra, hogy ugyanilyen egyszerű megoldás létezik 5 egyforma részre való darabolás esetén, ahogy az előző jobb ábra mutatja:

Végezetül nézzünk egy másik példát, amelynél a különböző szituációkban végzett gondolatmenetek sorozata fertőző lehet.

4. <u>példa</u>: A mellékelt ábrán egy négyzetet 4 egyenlő részre osztottunk, utána pedig besatíroztunk részeket.



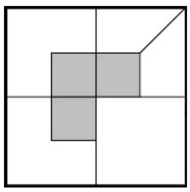
A) a jobb felső fehér részt osszuk fel 2 egyforma alakú részre!

B) a baloldali jobb felső fehér részt osszuk fel 3 egyforma alakú részre!

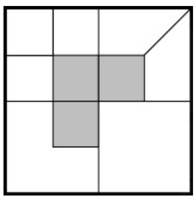
C) a baloldali alsó fehér részt osszuk fel 4 egyforma alakú részre!

D) a jobboldali alsó fehér részt osszuk fel 7 egyforma részre!

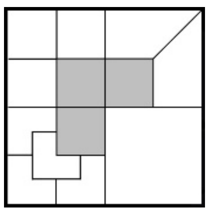
A) A szimmetria miatt nincs gond a két részre való osztással. Egy megoldás a következő:



B) A három egyforma részre való felosztás is aránylag könnyen beugrik. Egy megoldás a következő:

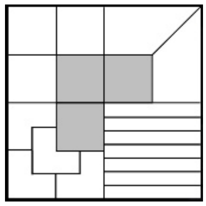


C) A négy egyforma részre való felosztás már komplexebb. Egy megoldás a következő:



D) Marad tehát, hogy megválaszoljuk az utolsó kérdést. Az előző három megoldást követve, ezek alapján az lehet az érzésünk, hogy ezek a megoldások egyre komplexebbek, így az utolsó megoldás az előbbieknél még komplexebb kell legyen. Akinek nincs megoldási ötlete, vagy az előbbi véleményre hajlamos, annak a gondolkodását már ”megfertőzte” az első három megoldás. Ezt azért állítjuk, mert a negyedik esetben a feltételek már megváltoztak, és így a megoldás komplexitása nem szükségszerű, hiszen a negyedik négyzetben már nincsen besatírozott négyzet mint az előző háromban, így nincs ami „bezavarjon” a felosztásokban.

Emiatt nem kellene ugyanúgy gondolkodnunk, mint az előbbiekben. Egy nagyon egyszerű és természetes megoldás a hét részre osztással a következő:



A hamis analógiák egy érdekes területét képezik a véges és a végtelen összegek (és szorzatok) közötti hamis analógiák. Nézzünk ezek közül néhányat.

5. <u>példa</u>: Számítsuk ki az $S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}$ összeget!

Alkalmazzuk a mértani haladvány összegének a kiszámolására használt klasszikus módszert: szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát $\frac{1}{10}$-el. Ekkor $\frac{S_n}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + \frac{1}{10^n}$. Most kivonjuk az eredeti egyenletből ezt az egyenletet: $S_n - \frac{S_n}{10} = 1 - \frac{1}{10^n}$ ahonnan $S_n = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

Alkalmazzuk az előbbi eljárást a következő végtelen összeg esetén is:

6. <u>példa</u>: Számítsuk ki az $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...$ összeget!

Ezúttal is szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát $\frac{1}{10}$-el. Kapjuk, hogy $\frac{S}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...$ és így az eredeti egyenlőség alapján $S = 1 + \frac{S}{10}$, ahonnan $S = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

Vajon helyes az eredmény? Vajon mindent helyesen csináltunk? Nézzük a következőket: $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... = 1{,}111.... = 1,(1) = 1\frac{1}{9}$ ami azt mutatja, hogy az előző eredmény helyes. De vajon az eljárás is, ahogyan dolgoztunk, az is helyes? Nézzük csak a következő példát:

7. <u>példa</u>: Számítsuk ki az $S = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + ...$ összeget!

Most is szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát, ezúttal 10-el. Azt kapjuk, hogy $10S = 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ...$. Így az eredeti egyenlőség alapján felírható, hogy S= 1+10 S ahonnan $S = -\frac{1}{9} < 0$ ellentmondás adódik. Vajon miért is adódott, hiszen ugyanúgy jártunk el, mint a 6. példa esetén? Lássuk be, hogy míg a 6. példa esetén a sor konvergens, addig ebben az esetben divergens, vagyis $S = \infty$ ezért $10S = \infty$ így a $10S - S = -1$ egyenlőség tulajdonképpen egy $\infty - \infty$ határozatlan eset.

8. <u>példa</u>: Számítsuk ki az $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ összeget!

a) Csoportosítsunk így: $S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0$

b) Most meg így csoportosítunk: $S=1-(1-1)-(1-1)-...=1$

c) Vagy így is csoportosíthatunk: $S=1-(1-1+1-1+...)=1-S$ tehát S=1-S, ahonnan $S=\frac{1}{2}$.

Mint látjuk, három féle különböző eredményt kaptunk. Az első két esetben tulajdon képpen az 1-1-ből származó 0-kat végtelenszer írtuk le, tehát ismét egy, ezúttal $\infty\cdot 0$ határozatlan eset fölött siklottunk el. A harmadik esetben az S-et úgy kezeltük, mintha egy véges szám lenne (vagyis a sor konvergens lenne), holott a sor divergens.

9. példa: Számítsuk ki az $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ összeget!

Vegyük észre, hogy az összeg megközelíthető az első, illetve az első két taggal így: $\frac{1}{2}<S<1$.Másfelől

$$2S=\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+...=\frac{2}{1}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+...=\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{1}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)+...=$$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=S$ vagyis $2S=S$, ahonnan S= 0 absurdum.

10. példa: Számítsuk ki az $S=1-2+3-4+5-...$ összeget!

Egyrészt $S=1+(-2+3)+(-4+5)+...=1+1+1+...>0$

Másfelől felírható, hogy $S+(2+4+6+...)=1+3+5+...$ ahonnan $S+2\cdot(2+4+6+...)=(1+3+5+...)+(2+4+6+...)$ vagyis $S+4\cdot(1+2+3+4+...)=1+2+3+4+...$, tehát $S+3\cdot(1+2+3+4+...)=0$ ellentmondásra jutunk.

11. példa: Számítsuk ki az $S=1+2+3+4+...$ összeget!

Nyilvánvalóan S> 0. Másfelől felírható, hogy:

$S=(1+3+5+...)+(2+4+6+...)=(1+3+5+...)+2(1+2+3+4+...)=(1+3+5+...)+2S$ ahonnan $S=(1+3+5+...)+2S$ így S= - (1+3+5+…)< 0, absurdum.

12. példa: Számítsuk ki a $P=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...$ szorzatot!

Felírható, hogy: $P=(1\cdot3\cdot5\cdot...)(2\cdot4\cdot6\cdot...)=(1\cdot3\cdot5\cdot...)(2\cdot2\cdot2\cdot...)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...)=$ $=(1\cdot3\cdot5\cdot...)(2\cdot2\cdot2\cdot...)P$ vagyis $P=(1\cdot3\cdot5\cdot...)(2\cdot2\cdot2\cdot...)P$ és végig osztva $P\neq 0$ -val kapjuk, hogy $(1\cdot3\cdot5\cdot...)(2\cdot2\cdot2\cdot...)$ = 0 ami ellentmondás.

13. példa: Számítsuk ki a $T=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot...}$ tört értékét!

Egyrészt $T=\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot...)(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot...)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot...}=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot...>1$.

Másfelől $T=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4...}{(2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot3)...}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4...}{(2\cdot2\cdot2\cdot...)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot...)}=\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot...}<1$, és ezzel ellentmondásra jutottunk.

13. példa: Számítsuk ki az $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ összeget!

Sorra felírható, hogy $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$… Összegezve ezeket az egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, vagyis $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, tehát $S < S$ ellentmondás adódik.

Végezetül nézzünk egy kis érdekességet. A tanórákon nagyon sok alkalommal jutunk oda, hogy a következőket írjuk: $x = y \Rightarrow \sin x = \sin y$ és ha $x, y \in [0, 2\pi]$ és $\sin x = \sin y$, akkor $x = y$ Ilyen következtetéseket még felírunk a cosx, tgx, ctgx valamint a logaritmus, a gyök és az exponenciális, stb. kapcsán. Mindazok ellenére, hogy kihangsúlyozottan elmagyarázzuk, hogy ezekben az esetekben tulajdonképpen az illető függvények injektív tulajdonságáról van szó, mégis nagyon sok tanulónak az az érzése alakul ki, hogy pl. az $x = y \Rightarrow \sin x = \sin y$ esetben egyszerűen beszoroztunk sin-el, és pl. a $x, y \in [0, 2\pi]$ és $\sin x = \sin y$, akkor $x = y$ következtetésnél leegyszerűsítettünk sin-el, stb. Ha ez így lenne, figyeljük csak meg, hogy milyen „bűvészmutatványt" is elvégezhetnénk:

Közismert, hogy $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ minden n természetes számra. Ebből kifolyólag felírható, hogy $1x + 2x + 3x + \ldots + nx = \frac{n \cdot (n+1)}{2} x = \frac{\frac{nx}{2} \cdot \frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}}$. Ennek alapján most felírható, hogy $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ és éppen egy helyes összefüggést kaptunk, persze helytelen módszerekkel, mégis az egésznek az a haszna, hogy ily módon könnyen memorizálhatjuk az utóbbi összefüggést.

Befejezésül, a konklúziókat levonva leszögezhetjük, hogy a gondolkodás „fertőzés" kiváltképpen az analógiás- indukciós gondolkodási műveletvégzéseknél áll fenn, amikor is hajlamosak lehetünk bizonyos, analógnak tűnő gondolatmeneteket, eredményeket alkalmazni olyan esetekben is amikor a feltételek, körülmények között már nem áll fenn hasonlóság. Ilyen esetekből származnak a hamis analógiák is, amelyek létrejöttének még sok más oka is van.