

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

Etapa I – 16.10.2010

Barem de corectare și notare

Clasa a XII-a – M1

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C	C	D	C	D	C	E	C	C	D

Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. $A^2 - 2A = -5I_2$ (1 punct), $A^2 - 2A + 6I_2 = I_2$ (1 punct), $\det(A^2 - 2A + 6I_2) = 1$ (1 punct).

2. $\det A = \det A^t$ (1 punct). $\det(-A^t) = (-1)^3 \det A^t = -\det A$ (1 punct). Concluzia (1 punct).

3. $\det(A) = 0$ (1 punct). $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (sau: există minori nenuli de ordin 2) (1 punct),

deci $\text{rang}(A) = 2$ (1 punct).

4. Matricea sistemului are $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -12$ (2 puncte). Deoarece determinantul

este nenul, conform teoremei lui Cramer rezultă cerința. (1 punct).

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1/n}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n+1/n^2}} = 1$ (1 punct).



6. Cazul de nedeterminare este $\frac{0}{0}$ (1 punct). $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4 \frac{1}{1+x^2}}{1}$ (1 punct). Limita cerută este -2 (1 punct).

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{n+2} = a$ (1 punct). Din $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}^*$ rezultă $a = 1$ (1 punct). Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{e}$ (1 punct).

8. Este suficient ca $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax^2+1)}{x^2} = 2$ (1 punct). $\lim_{x \rightarrow 0} a \frac{\ln(ax^2+1)}{ax^2} = a \cdot 1 = a$ (1 punct).
 $a = 2$ (1 punct).

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$, (2 puncte) deci asimptota spre $+\infty$ este $y = 0$ (1 punct).

10. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ (1 punct). $> 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1 punct). Funcția este crescătoare pe \mathbb{R} (1 punct).

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x + \sin x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (1 punct), $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ (0,5 puncte) $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{3}$ (0,5 puncte).

2. Șirul $x_n = a_n^n$ verifică $x_{n+1} = x_n + 1$ (0,5 puncte). Din $x_1 = a_1 = 2$ rezultă $x_n = n + 1 \Rightarrow a_n = \sqrt[n]{n+1}$ (1 punct). Limita este 1 (0,5 puncte).

3. $A^2 X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = (XB)B = XB^2$ (0,5 puncte), deci, inductiv,



$A^{2010}X = XB^{2010}$ (0,5 puncte). Rezultă $X = 2X \Rightarrow X = O_n$ (1 punct).

4. Fie $f(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - \operatorname{tr}A \cdot X + \det A$. Din ipoteză rezultă că $f(0) = f(-1) \Rightarrow \operatorname{tr}A = -1$ (1 punct). Atunci $f(X) = X^2 + X + \det A$, de unde $f(1) = f(-2)$ (1 punct).

5. Presupunem prin absurd că există $a > 0$ pentru care $3^x + 4^x \geq 6^x + a^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x + 4^x - 6^x - a^x$ (0,5 puncte). Cum $f(0) = 0$ și $f \geq 0$, din teorema lui Fermat rezultă $f'(0) = 0$ (0,5 puncte). Obținem $a = 2$ (0,5 puncte). Atunci $f(x) = -(3^x - 2^x)(2^x - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, contradicție (0,5 puncte).

