

# EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI

✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE

✓VERIFICAREA CUNOȘȚINȚELOR PE ETAPE DE PARCURGERE A MATERIEI

[www.evaluareineducatie.ro](http://www.evaluareineducatie.ro)

2008. május 10.

X. osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írj. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

## I. FELADAT( 20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) A  $C_4^2$  értéke:  
a) 8                      b) 4                      c) 6                      d) 16
- (4p) 2) A  $V_4^2$  értéke:  
a) 12                      b) 8                      c) 6                      d) 16
- (4p) 3) Az  $(1 + \sqrt{2})^4$  binom kifejtés racionális tagjainak száma:  
a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4
- (4p) 4) Az  $\arccos 1$  értéke:  
a) 0                      b)  $\pi$                       c)  $\frac{\pi}{2}$                       d)  $\frac{\pi}{4}$
- (4p) 5) Az  $x^3 = i$  egyenlet megoldása:  
a)  $i$                       b)  $-i$                       c)  $-1$                       d) 1

## II. FELADAT ( 40p )

(A vizsgalapra csak a feladat számát és az eredményt írd!)

- (4p) 1) Írd fel a  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^8$  binom kifejtésének ötödik tagját!
- (4p) 2) Az 1, 2, 3 és 4 számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám írható fel, amelynek számjegyei különbözőek?
- (4p) 3) Egy öt elemű halmaznak hány három elemű részhalmaza van?
- (4p) 4) Egy sportrendezvényen 8 csapat vesz részt. Hány lehetőség van az első három helyezés elfoglalására?
- (4p) 5) Hány darab 3 jegyű természetes szám van?
- (4p) 6) Határozd meg az  $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{4,5,6,7,8\}$  szigorúan monoton függvények számát!
- (4p) 7) Írj fel egy olyan  $z$  komplex számot, amelyre  $z^3 \notin \mathbf{R}$  !
- (4p) 8) Írj fel egy olyan  $z$  komplex számot, amely nem valós és  $z^4 \in \mathbf{R}$  .
- (4p) 9) Írd fel az  $x^2 + x + 1 = 0$  egyenlet komplex megoldásait!
- (4p) 10) Számítsd ki  $\arcsin 0 + \arccos 0$  értékét!

### III. FELADAT ( 15p )

( Írd le a feladat részletes megoldását!)

Legyen  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 3$ ,  $F$  az összes  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  függvények halmaza és

$H = \{f_i \in F \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  az  $F$  olyan részhalmaza, amely rendelkezik a következő

tulajdonságokkal: ha  $f \in H$  akkor az  $f$  függvény injektív vagy szürjektív és

$\forall i \leq j \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén  $f_i \circ f_j \in H$ . Legyen  $f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-szor}}$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$  esetén,

$1_{\mathbf{Z}} \in F$ ,  $1_{\mathbf{Z}}(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbf{Z}$  és  $g \in F$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{Z}$ .

- (4p) a) Igazold, hogy  $g^{[k]}(x) = x + k$ ,  $\forall x \in \mathbf{Z}$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$  esetén.
- (4p) b) Ha  $f \in H$  igazold, hogy  $f^{[k]} \in H$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}^*$  esetén.
- (2p) c) Igazold, hogy  $g \notin H$ .
- (1p) d) Ha  $f \in H$  injektív és  $i < j \in \mathbf{N}^*$  esetén  $f^{[i]} = f^{[j]}$  igazold, hogy  $f^{[j-i]} = 1_{\mathbf{Z}}$ .
- (1p) e) Ha  $f \in H$  szürjektív és  $i < j \in \mathbf{N}^*$   $f^{[i]} = f^{[j]}$  igazold, hogy  $f^{[j-i]} = 1_{\mathbf{Z}}$ .
- (1p) f) Igazold, hogy  $1_{\mathbf{Z}} \in H$ .
- (1p) g) Igazold, hogy a  $H$  halmaz csak bijektív függvényeket tartalmaz.
- (1p) h) Igazold, hogy ha  $u, v \in H$ , akkor  $u \circ v \in H$ .

### IV. FELADAT ( 15p )

(Írd le a feladat részletes megoldását!)

Adottak  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a \in \mathbf{R}$  és  $z = \frac{a+i}{a-i} \in \mathbb{C}$ .

- (4p) a) Igazold, hogy  $|z| = 1$ .
- (4p) b) Igazold, hogy  $z$  akkor és csak akkor valós szám, ha  $a = 0$ .
- (2p) c) Ha  $a \neq 0$  és  $\sin\left(n \arctg \frac{1}{a}\right) = 0$  igazold, hogy  $(a+i)^n \in \mathbf{R}$ .
- (1p) d) Ha  $p \in \mathbf{Z}^*$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$ ,  $(p, q) = 1$  és  $(p^2 + q^2) \mid (p^2 + q^2)^{2^{2n}}$  igazold, hogy  $p = \pm 1$  és  $q = 1$ .
- (1p) e) Ha  $p \in \mathbf{Z}^*$ ,  $q \in \mathbf{N}^*$ ,  $(p, q) = 1$ , és  $(p+iq)^n = (p-iq)^n$ , igazold, hogy  $(p^2 + q^2) \mid 2^{2n}$ .
- (1p) f) Ha  $a \in \mathbf{Q}$  és  $(a+i)^n \in \mathbf{R}$  igazold, hogy  $a \in \{-1, 0, 1\}$ .
- (1p) g) Ha  $a \in \mathbf{Q}$  határozd meg azokat a  $z = \frac{a+i}{a-i}$  komplex számokat, amelyekre létezik  $n \in \mathbf{N}^*$  úgy, hogy  $z^n = 1$  legyen.
- (1p) h) Ha  $a \in \mathbf{Q}$  és  $tg(a\pi) \in \mathbf{Q}$  igazold, hogy  $tg(a\pi) \in \{-1, 0, 1\}$ .

Összeállította: Ion Savu és Nicolae Muşuroia