

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI

✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE

✓VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR PE ETAPE DE PARCĂRGERE A MATERIEI

www.evaluareineducatie.ro

2008. május 10.

XII. osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat  rj. A III.  s IV. feladatok megoldásait  rd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

I. FELADAT (20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) Az $f = X^3 + X^2 + X + 1$ polinom gyökeinek szorzata :
a) 0 b) 1 c) -1 d) 2
- (4p) 2) Az $f = X^3 + X^2 + X + 1$ polinom gyökeinek összege:
a) -1 b) 0 c) 4 d) 1
- (4p) 3) Az $f = X^3 + X^2 + X + 1$ polinom valós gyökeinek s ma:
a) 0 b) 1 c) 3 d) 2
- (4p) 4) Az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$ integrál értéke:
a) π b) 1 c) $\frac{\pi}{2}$ d) 2
- (4p) 5) A $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx$ határérték értéke:
a) 1 b) ∞ c) 0 d) 0,5

II. FELADAT (40p)

(A vizsgalapra csak a feladat sémát és az eredményt  rd!)

- (4p) 1) Határozd meg az (\mathbb{R}, \circ) csoport semleges elemét, ha $x \circ y = x + y - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$!
- (4p) 2) A $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ testben s m tsd ki az $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \hat{6}$ szorzat értékét !
- (4p) 3) Adj példát egy 10 elem  gyűrűre!
- (4p) 4) Adj példát egy 11 elem  testre!
- (4p) 5) Az $a = \int_0^{\pi} \sin x dx$ és $b = \int_0^{\pi} x dx$ s mok közül melyik nagyobb?
- (4p) 6) S m tsd ki $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ értékét!
- (4p) 7) S m tsd ki $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$ értékét!
- (4p) 8) S m tsd ki $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ értékét!
- (4p) 9) S m tsd ki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt}{x^2}$ értékét!
- (4p) 10) Hány r cion lis gyöke van az $f = X^3 - 2X + 1$ polinomnak?

III. FELADAT (15p)**(Írd le a feladat részletes megoldását!)**Legyen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ az $f = X^3 + 3X^2 - 1$ polinom három gyöke, $S_0 = 3$ és

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Számítsd ki $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ és $f(1)$ értékét.
- (2p) b) Igazold, hogy az f polinom mindhárom gyöke valós szám.
- (2p) c) Igazold, hogy az f polinomnak nincs racionális gyöke!
- (3p) d) Igazold, hogy: $S_0 \in \mathbb{Z}$, $S_1 \in \mathbb{Z}$ és $S_2 \in \mathbb{Z}$.
- (1p) e) Igazold, hogy: $S_{n+3} + 3S_{n+2} - S_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.
- (1p) f) A matematikai indukció módszerével igazold, hogy $S_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.
- (1p) g) Igazold, hogy $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.
- (1p) h) Igazold, hogy bármely $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ és bármely I nemüres, nyílt intervallum esetén létezik $a_1, a_2, \dots, a_p \in I - \mathbb{Q}$ úgy, hogy $a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n \in \mathbb{Q}$ legyen, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

IV. FELADAT (15p)**(Írd le a feladat részletes megoldását!)**Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \text{ és } F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

függvények, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Legyen $S(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx$,

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Igazold, hogy az F függvény az f pimitív függvénye \mathbb{R} -en.
- (4p) b) Igazold, hogy $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ és $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.
- (2p) c) Ha $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ esetén, bizonyítsd be, hogy F állandó függvény.
- (1p) d) Felhasználva a $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$, $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ összefüggést igazold, hogy $S(p, q) = 0$, ahol $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.
- (1p) e) Igazold, hogy $S(p, p) = \pi$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ esetén.
- (1p) f) Ha $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, igazold, hogy $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
- (1p) g) Ha $\int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = 0$, igazold, hogy $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
- (1p) h) Ha $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, $b_n \neq 0$ és $|b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0| = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén amelyre $|z| = 1$, igazold, hogy $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ és $|b_n| = 1$.

Összeállította: Ion Savu és Constantin Toma Drugan