

# EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI

✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE

✓VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR PE ETAPE DE PARCURGERE A MATERIEI

[www.evaluareineducatie.ro](http://www.evaluareineducatie.ro)

## MATEMATIKA TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY

2008. május 10.

X. osztály M2

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írd. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

### I. FELADAT (20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) A  $C_4^2$  értéke:  
a) 8                      b) 4                      c) 6                      d) 16
- (4p) 2) A  $V_4^2$  értéke:  
a) 12                      b) 8                      c) 6                      d) 16
- (4p) 3) Az  $(1 + \sqrt{2})^4$  binom kifejtés racionális tagjainak száma:  
a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4
- (4p) 4) Az  $\arccos 1$  értéke:  
a) 0                      b)  $\pi$                       c)  $\frac{\pi}{2}$                       d)  $\frac{\pi}{4}$
- (4p) 5) Az  $x^3 = i$  egyenlet megoldása:  
a)  $i$                       b)  $-i$                       c)  $-1$                       d) 1

### II. FELADAT (40p)

(A vizsgalapra csak a feladat számát és az eredményt írd!)

- (4p) 1) Írd fel a  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^6$  binom kifejtésének negyedik tagját!
- (4p) 2) Az 1, 2, 3 és 4 számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám képezhető, amelynek számjegyei különbözőek?
- (4p) 3) Egy öt elemű halmaznak hány három elemű részhalmaza van?
- (4p) 4) Egy sportrendezvényen 6 csapat vesz részt. Hány lehetőség van az első három helyezés elfoglalására?
- (4p) 5) Hány darab háromjegyű természetes szám van?
- (4p) 6) Határozd meg az  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7\}$  szigorúan monoton függvények számát!
- (4p) 7) Írd fel egy olyan  $z$  komplex számot, amelyre  $z^3 \notin \mathbf{R}$ !
- (4p) 8) Írd fel egy olyan  $z$  komplex számot, amely nem valós és  $z^4 \in \mathbf{R}$ .
- (4p) 9) Írd fel az  $x^2 + x + 1 = 0$  egyenlet komplex megoldásait!
- (4p) 10) Számítsd ki  $\arcsin 0 + \arccos 0$  értékét!

**III. FELADAT ( 15p ) (írd le a feladat részletes megoldását!)**

- (4p) a) Igazold, hogy  $xy - \frac{1}{xy} - \left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$  esetén!
- (4p) b) Oldd meg az  $\mathbf{R}^*$  halmazban az  $x^3 - \frac{1}{x^3} = x + x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$  egyenletet!
- (2p) c) Igazold, hogy  $ab - \frac{1}{ab} \geq a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ,  $\forall a, b \in [1, \infty)$  esetén!
- (2p) d) Ha  $x > y > 0$ , igazold, hogy  $x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y}$ .
- (1p) e) Igazold, hogy  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, \infty)$  esetén
- $$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_n}.$$
- (1p) f) Ha  $a, b, c \in \mathbf{N}$ , igazold, hogy  $2^{a+b+c} - 2^{-a-b-c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - 2^{-a} - 2^{-b} - 2^{-c}$ .
- (1p) g) Ha  $a \in [1, \infty)$ , igazold, hogy  $a^n - \frac{1}{a^n} \geq n\left(a - \frac{1}{a}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  esetén!

**IV. FELADAT ( 15p ) (írd le a feladat részletes megoldását!)**

Egy síkban adottak a  $d$  és  $e$  párhuzamos egyenesek. A  $d$  egyenesen felvesszük az egymástól különböző  $A_1, A_2, A_3, A_4$  pontokat, az  $e$  egyenesen az egymástól különböző  $B_1, B_2, B_3, B_4$  pontokat úgy, hogy teljesüljenek az

$$A_1B_1 \perp d, A_2B_2 \perp d \text{ és } A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = A_1B_1 = 1$$

összefüggések. Jelöljük  $M$ -mel az  $\{A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4\}$  halmazt.

- (4p) a) Számítsd ki az  $A_1A_3B_1$  háromszög területét!
- (4p) b) Számítsd ki azon egyenesek számát, amelyek legalább két pontot tartalmaznak az  $M$  halmazból!
- (2p) c) Számítsd ki egy olyan háromszögnek a területét, amelynek minden csúcsa az  $M$  halmazban van és a területe a lehető legnagyobb!
- (2p) d) Számítsd ki egy olyan négyszögnek a területét, amelynek minden csúcsa az  $M$  halmazban van és a területe a lehető legnagyobb!
- (1p) e) Határozd meg azon téglalapok számát, amelyek nem négyzetek és amelyeknek minden csúcsa az  $M$  halmazban van!
- (1p) f) Határozd meg az olyan háromszögek számát, amelyeknek csúcsai az  $M$  halmazban vannak!
- (1p) g) Határozd meg az olyan négyszögek számát, amelyeknek csúcsai az  $M$  halmazban vannak!

**Összeállította Ion Savu és Toni Mihalcea**