

EVALUARE ÎN EDUCAȚIE LA MATEMATICĂ

✓EVALUARE EXTERNĂ REALIZATĂ DE FACTORI AUTORIZAȚI

✓EVALUARE CONTINUĂ ÎN EDUCAȚIE

✓VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR PE ETAPE DE PARCURGERE A MATERIEI

www.evaluareineducatie.ro

MATEMATIKA TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY, 2008. május 10.

XI. osztály M2

Megjegyzések. Minden feladat kötelező. Az I. feladatnál csak egy helyes válasz van! A II. feladathoz csak válaszokat írnak! A III. és IV. feladatok megoldását írni le részletesen! Hivatalból 10 pontot kapsz. Munkaidő 2 óra és 30 perc.

I. FELADAT (20p) (A versenylapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

- (4p) 1) $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszorzat eredménye:
a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (4p) 2) Az $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ és $C(0, 3)$ pontok által meghatározott háromszög területe:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 1,5
- (4p) 3) $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsának értéke:
a) 0 b) 10 c) -10 d) 300
- (4p) 4) Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény deriváltja:
a) $\sin x + \cos x$ b) $-\sin x + \cos x$ c) $\sin x - \cos x$ d) $-\sin x - \cos x$
- (4p) 5) $A \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\pi - 1}{x - 1}$ értéke:
a) 0 b) ∞ c) π d) 1

II. FELADAT (40p)

(A versenylapra csak a feladat számát és az eredményt írd!)

- (4p) 1) Vizsgáld meg az $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ egyenletrendszer kompatibilitását!
- (4p) 2) Írj fel egy kétismeretlenes, két egyenletből álló homogén, kompatibilis és határozatlan egyenletrendszert!
- (4p) 3) Számítsd ki: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2008}$.
- (4p) 4) Írj fel egy olyan $A \in M_3(\mathbf{R})$ mátrixot, amelyre $\text{rang}(A) = 1$.
- (4p) 5) Számítsd ki: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.
- (4p) 6) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2008}$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 7) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \arctg x$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 8) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 9) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x \sin x$ számítsd ki $f'(x)$ -et!
- (4p) 10) Ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{\sin x}$ számítsd ki $f'(x)$ -et!

MATEMATIKA TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY, 2008. május 10.

XI. osztály

III. FELADAT (15p) A versenylapra írd le a részletes megoldást!

Az M halmaz azon 2 sorból és 2 oszlopból álló mátrixokat tartalmazza, amelyek elemei az $\{1,2,3,4,5\}$ halmaz különböző elemei..

- (4p) a) Igazold, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M$.
- (4p) b) Számítsd ki az $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!.
- (2p) c) Igazold, hogy ha $C \in M$, akkor $\det(C) \neq 0$.
- (2p) d) Adj példát olyan $D \in M$ mátrixra, amelyre $\det(D) = 18$.
- (1p) e) Igazold, hogy ha $X \in M$, akkor $-18 \leq \det(X) \leq 18$.
- (1p) f) Igazold, hogy ha $A, B \in M$, akkor $A \cdot B \notin M$.
- (1p) g) Határozd meg az M halmaz elemeinek számát!

IV. FELADAT (15p) A versenylapra írd le a részletes megoldást!

Adotak az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ függvények és az

$(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ és $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $b_n = a_n + \frac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ sorozatok.

- (4p) a) Igazold, hogy $f(x) = F'(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Igazold, hogy az f függvény szigorúan csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon!
- (2p) c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő!
- (2p) d) Határozd meg az f függvény grafikus képének $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!
- (1p) e) Igazold, hogy $\frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2}$, $\forall k > 0$.
- (1p) f) Igazold, hogy a $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő!
- (1p) g) Igazold, hogy $1 \leq a_n < 1,22 \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Összeállította Ion Savu és Oana Nițulescu