



In parteneriat M.E.C.T.	TESTUL NATIONAL "EVALUARE ÎN EDUCATIE"	Sub egida ACADEMIEI ROMANE
	MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY CONSTANTIN NASTASESCU professzor koordinálásával, aki a ROMÁN AKADÉMIA levelező tagja	

2007. november 17.

XI.osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írd. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

I. FELADAT (20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.

- (4p) 1) Az A^3 mátrix elemeinek összege:
a) 2 b) 10 c) -2 d) 0
- (4p) 2) A legkisebb n természetes szám amelyre $A^n = I_2$,
a) 2 b) 6 c) 4 d) 3
- (4p) 3) Az $I_2 + A + \dots + A^5$ mátrix egyenlő:
a) O_2 b) I_2 c) A d) A^2
- (4p) 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$ egyenlő:
a) 0 b) 1 c) ∞ d) 0,5
- (4p) 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ egyenlő
a) 0 b) 1 c) ∞ d) 0,5

II. FELADAT (40p)

(A vizsgalapra csak a válaszokat írd!)

- (4p) 1) Számítsd ki az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixösszeget.
- (4p) 2) Számítsd ki az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixszorzatot.
- (4p) 3) Adj példát két $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A, B \neq O_2$ mátrixra, amelyekre $A \cdot B = O_2$.
- (4p) 4) Adj példát két $P, Q \in M_2(\mathbb{Z})$, $P, Q \neq I_2$ mátrixra, amelyekre $P \cdot Q = I_2$.
- (4p) 5) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}$ határértéket.
- (4p) 6) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ határértéket.
- (4p) 7) Adj példát olyan $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, amelyre $a_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.
- (4p) 8) Adj példát olyan $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, amelynek végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van és amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- (4p) 9) Adj példát korlátos és divergens sorozatra.
- (4p) 10) Adj példát olyan nemkorlátos sorozatra, amelynek nincs határértéke.

MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY 2007, november 17.

XI. osztály

III. FELADAT (15p)

(Írd le a feladat részletes megoldását!)

Jelölje S_n , $n \geq 2$, az n -ed rendű permutációk halmazát és $m(\sigma)$ a $\sigma \in S_n$ permutáció

inverzióinak számát. Legyen, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in S_4$.

- (4p) a) Számítsd ki az $x \cdot y$ és $y \cdot x$ permutációkat.
- (4p) b) Számítsd ki x^{-1} és y^{-1} permutációkat.
- (2p) c) Számítsd ki az $m(x)$ és $m(y)$ értékét.
- (2p) d) Számítsd ki a $\sum_{\sigma \in S_3} m(\sigma)$ összeget.
- (1p) e) Igazold, hogy az S_3 permutációinak bármely sorrendben képzett szorzata nem lehet az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció.
- (1p) f) Igazold, hogy az S_4 permutációit rendezhetjük úgy, hogy ebben a sorrendben összeszorozva őket az eredmény az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ permutáció legyen.
- (1p) g) Igazold, hogy az S_4 permutációit rendezhetjük úgy, hogy ebben a sorrendben összeszorozva őket az eredmény az $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció legyen.

IV. FELADAT (15p)

(Írd le a feladat részletes megoldását!)

Adottak az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{3^{1!}} + \frac{1}{3^{2!}} + \dots + \frac{1}{3^{n!}}$, $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot 3^{n!}}$,

$c_n \in \{-1, +1\}$ és $x_n = \frac{c_1}{3^{1!}} + \frac{c_2}{3^{2!}} + \dots + \frac{c_n}{3^{n!}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- (4p) a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő.
- (2p) b) Igazold, hogy a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő.
- (2p) c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatok korlátosak.
- (2p) d) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatok konvergenssek és határértékük egyenlő.
- (2p) e) Ha $a \in \mathbb{R}$ az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat határértéke igazold, hogy a irracionális.
- (2p) f) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens és határértéke a $[-a, a]$ intervallumban van.
- (1p) g) Igazold, hogy létezik legalább egy $b \in [-a, a]$ úgy, hogy bármely $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq b$.

Összeállította: Constantin Toma Drugan, Rm. Vâlcea