



In parteneriat M.E.C.T.	TESTUL NATIONAL "EVALUARE ÎN EDUCATIE"	Sub egida ACADEMIEI ROMANE
	MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY CONSTANTIN NASTASESCU professzor koordinálásával, aki a ROMÁN AKADÉMIA levelező tagja	

2007. november 17.

XII. osztály

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írj. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

I. FELADAT (20p)

(A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)

R - en értelmezzük az $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$ műveletet.

- (4p) 1) $x, y \in \mathbf{R}$ esetén az $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$ egyenlőség akkor igaz, ha
a) x, y tetszőleges valós szám b) $x < y$ c) $x > y$ d) $x = y$
- (4p) 2) A " \circ " művelet semleges eleme:
a) 1,5 b) 3 c) 0 d) 5
- (4p) 3) Az $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ egyenlőség igaz:
a) ha $x = y = z$ b) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ esetén c) $x \neq y \neq z$ esetén d) $x \neq y$ esetén.
- (4p) 4) Az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$ függvény egy primitív függvénye az $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,
a) $F(x) = x \ln x$ b) $F(x) = x \ln x - x$ c) $F(x) = x \ln x + x$ d) $F(x) = \frac{1}{x}$
- (4p) 5) Ha $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{-x}$ egy primitív függvénye, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$
a) valós szám b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) nem létezik

II. FELADAT (40p)

(A vizsgalapra csak a válaszokat írd!)

- (4p) 1) Mennyi a $(\mathbf{Z}_5, +)$ csoport elemeinek összege?
- (4p) 2) Mennyi a (\mathbf{Z}_6, \cdot) monoid elemeinek szorzata?
- (4p) 3) Adj példát nemkommutatív, véges csoportra.
- (4p) 4) Adj példát nemkommutatív, végtelen elemet tartalmazó csoportra.
- (4p) 5) Írd fel az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin x$ egy primitív függvényét.
- (4p) 6) Számítsd ki $\int \frac{dx}{2x+3}, x \in (0, \infty)$.
- (4p) 7) Írd fel azt az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt amelynek egy primitív függvénye az $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = e^{x^2}$.
- (4p) 8) Ha $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \cos x$ függvény egy primitív függvénye, mennyi a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x}$ határérték?
- (4p) 9) Ha $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \max\{x, x^2\}$ függvény egy primitív függvénye, mennyi az $F(1) - F(0)$ értéke?
- (4p) 10) Ha $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \min\{x, x^2\}$ függvény egy primitív függvénye, mennyi az $F(1) - F(0)$ értéke?

MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY

XII. osztály

III. FELADAT (15p)

(Írd le a feladat részletes megoldását!)

Az $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ halmazon értelmezzük a "+" műveletet úgy, hogy $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall (a, b), (c, d) \in E$. Legyen F azon $f : E \rightarrow E$ függvények halmaza, amelyekre $f((x, y)) + f((p, q)) = f((x, y) + (p, q))$, $\forall (x, y), (p, q) \in E$ és G azon $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ függvények halmaza, amelyekre $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}$. $f \in F$, esetén legyen $f((1, 0)) = (i, j)$ $f((0, 1)) = (k, l)$ és $A_f = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$. Ha tudjuk, hogy $(E, +)$ kommutatív csoport:

- (4p) a) Igazold, hogy $f(0, 0) = (0, 0)$, $\forall f \in F$ és $g(0) = 0$, $\forall g \in G$.
- (4p) b) A matematikai indukció módszerével igazold, hogy $\forall (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in E$, $\forall f \in F$ és $\forall n \in \mathbf{N}^*$ esetén $f((a_1, b_1) + \dots + (a_n, b_n)) = f((a_1, b_1)) + \dots + f((a_n, b_n))$.
- (2p) c) Igazold, hogy $g(x) = g(1) \cdot x$, $\forall x \in \mathbf{Z}$, $\forall g \in G$.
- (2p) d) Igazold, hogy a G halmaz csak két bijektív függvényt tartalmaz.
- (1p) e) Igazold, hogy $f((x, y)) = (x \ y) \cdot A_f$, $\forall (x, y) \in E$, $\forall f \in F$. (itt $(x \ y) \in M_{1,2}(\mathbf{Z})$).
- (1p) f) Igazold, hogy $f \in F$ akkor és csak akkor bijektív, ha $\det(A_f) \in \{\pm 1\}$.
- (1p) g) Ha $f \in F$ és $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in E$, igazold, hogy $f(x) = x$, $\forall x \in E$.

IV. FELADAT (15p)

(Írd le a feladat részletes megoldását!)

Adottak az $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f_n(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ függvények és minden f_n függvény esetén legyen $I_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az f_n azon primitív függvénye amelyre $I_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Ismertnek tekintjük a $2^n \cos a_1 \cdot \dots \cdot \cos a_n = \sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)$ összefüggést, ahol az összegzést az előjelek minden lehetséges megválasztása szerint végezzük.

- (4p) a) Igazold, hogy $I_1(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Igazold, hogy $f_n(x + 2\pi) = f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) c) Igazold, hogy ha $n \in \{5, 6\}$, akkor $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n \neq 0$, az előjelek bármely megválasztása esetén.
- (2p) d) Igazold, hogy akkor és csak akkor létezik az előjeleknek olyan megválasztása amelyre $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n = 0$, ha $n \in \mathbf{N}^*$ $4k$ vagy $4k + 3$ alakú.
- (1p) e) Igazold, hogy I_{2008} nem periódikus függvény.
- (1p) f) Igazold, hogy I_{2009} periódikus függvény.
- (1p) g) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_{2010}(x)}{x}$ határértéket.

Összeállította: Ion Savu és Costel Chiteş