



In parteneriat <b>M.E.C.T.</b>	<b>TESTUL NATIONAL "EVALUARE ÎN EDUCATIE"</b>	Sub egida <b>ACADEMIEI ROMANE</b>
	<b>MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY</b>  CONSTANTIN NASTASESCU professzor koordinálásával, aki a ROMÁN AKADÉMIA levelező tagja	

**2007. november 17.**

**X. osztály**

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írd. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

**I FELADAT (20p) (A vizsgalatra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)**

- (4p) 1) Hány irracionális szám van a  $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}\}$  halmazban?  
a) 89                      b) 90                      c) 91                      d) 92
- (4p) 2) Hány darab háromjegyű számot írhatunk fel az 1 és 2 számjegyek segítségével?  
a) 7                      b) 9                      c) 6                      d) 8
- (4p) 3) Melyik szám a  $3 + 4i$  komplex szám modulusza?  
a) 3                      b) 4                      c) 5                      d) 8
- (4p) 4) Ha  $\frac{1+i}{1-i} = a + bi$ , ahol  $a, b \in \mathbf{R}$ , mennyi az  $a + b$  összeg?  
a) 2                      b) 0                      c) 1                      d) -1
- (4p) 5) Mennyi a  $(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)$  szorzat értéke?  
a) 0                      b)  $\frac{1}{2^{89}}$                       c)  $-\frac{1}{2^{89}}$                       d) 1

**II FELADAT (40p)**

**(A vizsgalatra csak a válaszokat írd!)**

- (4p) 1) A  $\sqrt{2}$  és  $\sqrt[3]{3}$  számok közül melyik nagyobb?
- (4p) 2) Számítsd ki:  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ .
- (4p) 3) Számítsd ki:  $\sqrt[4]{(-2)^4}$ .
- (4p) 4) Számítsd ki:  $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}$ .
- (4p) 5) Számítsd ki  $(2^{10} - 2^2) \cdot (2^9 - 2^3) \cdot (2^8 - 2^4) \cdot \dots \cdot (2^2 - 2^{10})$ .
- (4p) 6) Ha  $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{R}$ , számítsd ki  $\sin 15^\circ$  értékét.
- (4p) 7) Számítsd ki:  $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \dots \cdot \cos 180^\circ$ .
- (4p) 8) Ha  $z$  komplex számra teljesül a  $z^2 + z + 1 = 0$  egyenlőség, számítsd ki  $z^3$ -t.
- (4p) 9) Ha  $|\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , számítsd ki  $\cos 15^\circ$  értékét.
- (4p) 10) Ha  $z$  komplex számra teljesül a  $z + \frac{1}{z} = 2$ , számítsd ki  $z^{2007}$ -t.

**III FELADAT ( 15p )****(Írd le a feladat részletes megoldását!)**

Legyen  $M$  azon nullától különböző természetes számok halmaza, amelyeknek 10-es számrendszerben való felírásában nem szerepel a 9- es számjegy.

- (4p) a) Igazold, hogy:  $1 \in M$ ,  $10 \in M$ ,  $18 \in M$  és  $19 \notin M$ .
- (4p) b) Határozd meg az  $M$  halmaz legnagyobb és legkisebb 5 számjegyű elemét.
- (2p) c) Határozd meg az  $M$  halmaz 2007számjegyű elemeinek számát.
- (2p) d) Igazold, hogy:  $1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^n < 10$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1p) e) Igazold, hogy:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1p) f) Igazold, hogy bármely  $m > 0$ , létezik  $n \in \mathbf{N}^*$  úgy, hogy  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq m$ .
- (1p) g) Igazold, hogy bármely  $n \in \mathbf{N}^*$  és bármely  $r_1 < r_2 < \dots < r_n \in M$  esetén  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} < 80$ .

**IV FELADAT ( 15p )****(Írd le a feladat részletes megoldását.)**

Adott az  $a$  oldalhosszúságú és  $O$  középpontú,  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  szabályos hatszög, és a  $B_1 \in (A_1 A_2)$ ,  $B_2 \in (A_2 A_3)$ ,  $B_3 \in (A_3 A_4)$ ,  $B_4 \in (A_4 A_5)$ ,  $B_5 \in (A_5 A_6)$ ,  $B_6 \in (A_6 A_1)$  pontok úgy hogy  $B_1 A_2 = x \cdot a$ ,  $B_2 A_3 = y \cdot a$ ,  $B_3 A_4 = z \cdot a$ ,  $B_4 A_5 = t \cdot a$ ,  $B_5 A_6 = u \cdot a$ ,  $B_6 A_1 = v \cdot a$ , ahol  $x, y, z, t, u, v \in (0, 1)$ .

- (4p) a) Igazold, hogy:  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$ .
- (3p) b) Igazold, hogy:  $\overrightarrow{OB_1} = x \cdot \overrightarrow{OA_1} + (1-x) \cdot \overrightarrow{OA_2}$ .
- (2p) c) Igazold, hogy:  $\overrightarrow{B_3 B_2} = y \cdot \overrightarrow{OA_1} + (1-z) \cdot \overrightarrow{OA_2}$ .
- (2p) d) Igazold, hogy az  $OB_1 B_2 B_3$  négyszög akkor és csak akkor paralelogramma ha  $x = y = z$ .
- (2p) e) Igazold, hogy a  $B_1 B_3 B_5$  és  $B_2 B_4 B_6$  háromszögek súlypontja akkor és csak akkor esik egybe, ha  $x + t = y + u = z + v$ .
- (1p) f) Ha  $n$  nem nulla és 6-nak többszöröse, léteznek az  $\overrightarrow{OY_1}$ ,  $\overrightarrow{OY_2}$ , ...,  $\overrightarrow{OY_n}$  nullvektortól és egymástól különböző, egyenlő moduluszú vektorok amelyekre  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\exists j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  úgy, hogy  $\overrightarrow{OY_i} = \overrightarrow{OY_j} + \overrightarrow{OY_k}$ .
- (1p) g) Ha  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 3$ , legyenek  $\overrightarrow{OX_1}$ ,  $\overrightarrow{OX_2}$ , ...,  $\overrightarrow{OX_n}$  nullvektortól és egymástól különböző, egyenlő moduluszú vektorok, amelyekre  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén  $\exists j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  úgy, hogy  $\overrightarrow{OX_i} = \overrightarrow{OX_j} + \overrightarrow{OX_k}$ . Igazold, hogy az  $n$  szám 6-nak többszöröse.

**Összeállította: Dana Heuberger és Cristian Heuberger, Nagybánya**