

**CONCURSUL DE EVALUARE ÎN MATEMATICĂ**  
 desfășurat sub coordonarea prof. **CONSTANTIN NĂSTĂSESCU**, membru corespondent al  
**ACADEMIEI ROMÂNE**  
**17 . 11 . 2007**  
**Clasa a XII -a**  
**SOLUȚII**

**SUBIECTUL I**

1) a) 2) a) 3) b) 4) b) 5) a)

**SUBIECTUL II**

- 1)  $\hat{0}$ .
- 2)  $\hat{0}$ .
- 3)  $S_3$ .
- 4)  $G = \{A \in M_2(\mathbf{R}) / \det(A) \neq 0\}$  și  $(G, \cdot)$  grup infinit necomutativ.
- 5)  $-\cos x$ .
- 6)  $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$ .
- 7)  $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$ .
- 8) 0.
- 9)  $\frac{1}{2}$ .
- 10)  $\frac{1}{3}$ .

**SUBIECTUL III**

- a)  $f((0,0)) = f((0,0)) + f((0,0))$ , deci  $f((0,0)) = (0,0)$ ,  $\forall f \in F$  și analog  $g(0) = 0$ ,  
 $\forall g \in G$ .
- b) Pentru  $n = 1$  și  $n = 2$  este evident. Apoi  $f((a_1, b_1) + \dots + (a_n, b_n) + (a_{n+1}, b_{n+1})) =$   
 $= f((a_1, b_1) + \dots + (a_n, b_n)) + f((a_{n+1}, b_{n+1})) = f((a_1, b_1)) + f((a_2, b_2)) + \dots + f((a_{n+1}, b_{n+1}))$ .
- c) Dacă  $x \in \mathbf{N}$ , atunci  $g(x) = g\left(\underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{de } x \text{ ori}}\right) = \underbrace{g(1) + \dots + g(1)}_{\text{de } x \text{ ori}} = x \cdot g(1)$ . Pentru  $x \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$ ,  
 $g(x) = -g(-x) = -(-x) \cdot g(1) = x \cdot g(1)$ .
- d) Bijective sunt doar funcțiile  $g(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbf{Z}$  și  $g(x) = -x$ ,  $\forall x \in \mathbf{Z}$
- e) Dacă notăm  $(1,0) = a$  și  $(0,1) = b$ , atunci  $(x,y) = xa + yb$  și  
 $f((x,y)) = f(xa + yb) = f(xa) + f(yb) = x \cdot f(a) + y \cdot f(b) = x(i,j) + y(k,l) =$   
 $= (xi + yk, xj + yl) = (xy) \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = (x,y) A_f$ .

- f)**  $f \in F$  este bijectivă dacă și numai dacă,  $\forall (u, v) \in E$ , există  $(x, y) \in E$ , unic, astfel încât
- $$f((x, y)) = (u, v) \text{ sau } (x, y) \cdot A_f = (u, v) \text{ sau } (x, y) \in E \text{ verifică sistemul } (*) \begin{cases} xi + yk = u \\ xj + yl = v \end{cases}.$$
- Sistemul  $(*)$  are soluție unică în  $E$  dacă și numai dacă  $\det(A) \in \{\pm 1\}$ .

- g)**  $\left( \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\text{de 5 ori}} \right)(x) = x$  este echivalentă cu  $x \cdot A_f^5 = x$  sau  $A_f^5 = I_2$ . Se știe că dacă

$A \in M_2(\mathbf{Q})$  și  $A^5 = I_2$ , atunci  $A = I_2$ , deci  $\forall x \in E$ , (vezi Bac 2008, editura Books Unlimited Publishing).

#### SUBIECTUL IV

- a)**  $I_1(x) = \int \cos x dx = \sin x$ .
- b)** Evident, deoarece  $\cos(kx + 2k\pi) = \cos kx$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- c)** Expresiile  $1 \pm 2 \pm \dots \pm 5$  și  $1 \pm 2 \pm \dots \pm 6$  sunt numere impare, deci sunt nenule.
- d)** Dacă  $n = 4k$ , atunci  
 $(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \dots + ((4k - 3) - (4k - 2) - (4k - 1) + (4k)) = 0$  și dacă  
 $n = 4k + 3$ , atunci  
 $(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + \dots + ((4k) - (4k + 1) - (4k + 2) + (4k + 3)) = 0$ . Când  $n = 4k + 1$   
sau  $n = 4k + 2$ , expresiile  $1 \pm 2 \pm \dots \pm n$  sunt numere impare, deci nenule.
- e)**  $f_{2008}(x) = \frac{1}{2^{2008}} \sum \cos(\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2008)x$ , deci  $f_{2008}(x)$  este de forma o constantă  $a$   
nenulă adunată cu sumă de  $\cos(\alpha x)$ , cu  $\alpha \neq 0$ . Orice primitivă a sa va fi de forma  $ax$   
adunată cu o sumă de forma  $\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$ , deci nu va fi periodică deoarece  $a \neq 0$ .
- f)** Cum  $2009 = 4k + 1$ , expresia  $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2009$  nu-l conține pe 0, deci  $f_{2009}(x)$  este o  
sumă de forma  $\cos(\alpha x)$  cu  $\alpha \neq 0$  și atunci  $I_{2009}(x)$  este o sumă de forma  $\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$  care  
este periodică, având  $t = 2\pi$  periodică.
- g)** Cum  $2010 = 4k + 2$ , expresia  $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2010$  nu conține pe 0, deci funcția  $I_{2010}$  este  
periodică cu  $t = 2\pi$  periodică. Fiind continuă este mărginită și atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_{2010}(x)}{x} = 0$ .