



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a IX-a – 2 ore

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspunsul	C	C	B	A	D	E	D	B	A	D

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II

- $a = \frac{1}{2}(2+18) = 10$ (1 p); $g = \sqrt{2 \cdot 18} = 6$ (1 p); $\frac{g}{a} = \frac{6}{10} = 60\%$ (1 p).
- $9m + 3(2m-1) + m - 1 = 0$ (1 p); $16m - 4 = 0$ (1 p); $m = \frac{1}{4}$ (1 p).
- $f(x) = ax + b$ (1 p); $b = 0$; $2a + b = 3$; $4a + b = 5$ (1 p); nu există soluție (1 p).
- $y = \frac{1}{x-1}$ (1 p); $x-1 \in \{-1, 1\}$ (1 p); $x \in \{0, 2\}$ (1 p).
- $B = A + 17 = C - 25$ (1 p); $A = \frac{3}{4}C = C - 42$ (1 p); $C = 168$, $B = 143$ (1 p).
- $2009^2 - 2009 \cdot 4016 + 2008^2 = 2009^2 - 2 \cdot 2009 \cdot 2008 + 2008^2 = (2009 - 2008)^2 = 1$ (3 p).
- $-13x > -2009$ (1 p); $x < \frac{2009}{13}$ (1 p); sunt 155 de soluții (1 p).
- $\text{tg } u = \frac{\text{diag. unei fețe}}{\text{muchie}}$ (2 p); $\text{tg } u = \sqrt{2}$ (1 p).
- $2(R+r) = 76 - 2 \cdot 13 = 50$ (1 p); $R - r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (1 p); $R = 15$, $r = 10$ (1 p).
- $S = 50 \cdot 30 + 2(20 \cdot 50 + 20 \cdot 30) = 4700 \text{ cm}^2$ (1 p); $S = 0,47 \text{ m}^2$ (1 p); 9,40 lei (1 p).

Subiectul III

- A are 7001 elemente (1 p); din $9^3 + 9 < 1000 < 10^3 + 10$ și $19^3 + 19 < 8000 < 20^3 + 20$ reiese că în A se află exact 10 elemente ale lui B, deci $A - B$ are 6991 elemente (1 p).
 - $\frac{100}{2+\sqrt{3}} = 100(2-\sqrt{3})$ (1 p); $26 < 200 - \sqrt{30000} < 27$, deci $x_{\max} = 26$ (1 p).
 - G_f trece prin $A(2;0)$ și $B(0;4)$ iar G_g trece prin $A(2;0)$ și $C(0;-1)$ (1 p); triunghiul ABC este dreptunghic (1 p).
 - Avem $x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz = 0$, adică $(x+y)(x+z)(y+z) = 0$ (1 p); rezultă $x = -y$, sau $x = -z$, sau $y = -z$, de unde concluzia (1 p).
 - Avem $amx + amy + bmx + bmy + anx + any + bnx + bny = 130$, (unde $(a,b), (m,n), (x,y)$ sunt numerele scrise pe perechi de fețe opuse), deci $(a+b)(m+n)(x+y) = 130$ (1p); obținem $(a+b) + (m+n) + (x+y) = 2 + 5 + 13 = 20$. (1p)
- ♦ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a IX-a – 4 ore

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspunsul	C	B	E	A	B	B	D	E	C	A

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II

- $\frac{15}{101} = 0,1485$ (2 p); a douăzecea zecimală este 5 (1 p).
- $1 - a + b = 0$ și $16 + 4a + b = 0$ (2 p); $a = -3, b = -4$ (1 p).
- $f(x) = ax + b$ (1 p); $a + b = 2, 3a + b = 1$ (1 p); $f(2) = 2a + b = \frac{3}{2}$ (1 p).
- $y = \frac{9-3x}{x^2-9} = \frac{-3}{x+3}$ (1 p); $x+3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ (1 p); $x \in \{-6, -4, -2, 0\}$ (1 p).
- $x^2 = 1 + 2x$ (1 p); $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ (1 p); $x = 1 + \sqrt{2}$ (1 p).
- $x = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$ (1 p); $x = 6 + 2\sqrt{4}$ (1 p); $x = 10 \in \mathbb{Q}$ (1 p).
- $-8 < 2x - 9 < 8$ (1 p); $1 < 2x < 17$ (1 p); $x \in \{1, 2, \dots, 8\}$, deci 8 soluții (1 p).
- $\sin u = \frac{d_{\text{față}}}{d}$ (1 p); $\sin u = \frac{m\sqrt{2}}{m\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (2 p).
- $S_{\text{con}} = \pi r g, S_{\text{cil}} = 2\pi r h$ (2 p); $g = 2h$, datorită unghiului de 30° (1 p).
- Raza maximă a unei bile care încapă în cutie este $r = \frac{m}{2} = 2,5$ (1 p); volumul maxim este $V = \frac{4}{3}\pi(2,5)^3$ (1 p);
 $V < \frac{\pi}{3} \cdot 62,5 < 21\pi < 80$, deci răspunsul este NU (1 p).

Subiectul III

- Dacă numărul n al bomboanelor s-ar mări cu 1, el ar fi divizibil cu 5, 6 și 7 (1 p); cel mai mic multiplu comun al acestor numere este 210, deci $n \geq 209 > 200$ (1 p).
- Dacă $x \geq 1$, $x^3(x-1) + x(x-1) + 1 > 0$ (1 p); dacă $x \leq 0$ este evident, iar dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x^4 + x^2(1-x) + 1 - x > 0$ (1 p).
- Trebuie $3x \leq 2008$ și $5 \mid (2008 - 3x)$ (1p); $x \in \{1, 6, 11, 16, \dots, 666\}$, mulțime care are 134 de elemente (1p).
- Arătăm că mulțimea trebuie să conțină o mulțime M cu cel puțin 7 numere impare consecutive (1 p): dacă ar fi doar 5 numere atunci, unul fiind divizibil cu 5, am avea $M = \{5, 7, 9, 11, 13\}$, dar 9 nu este prim, iar dacă ar fi doar 6 numere atunci M ar conține două numere divizibile cu 3 și mai mari decât 3 (1 p).
- Dacă $[AB], [BC], [CD], [DE]$ sunt segmente ale unei astfel de linii, atunci $AB \perp (BCD)$ și $DE \perp (BCD)$, deci $AB \parallel DE$, adică segmentele liniei sunt paralele „din trei în trei” (1 p). Proiectând linia pe o axă paralelă cu segmentele de lungimi 1, 4, 7, ..., 2008, ar rezulta o egalitate de forma $\pm 1 \pm 4 \pm 7 \pm \dots \pm 2008 = 0$ – imposibil, deoarece membrul stâng conține un număr impar de numere impare (1 p).

- ♦ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a X-a – TC+CD 3 ore

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
REZULTATE	B.	D.	B.	B.	E.	E.	C.	C.	C.	C.

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL II.

$$1. a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}. (1p)$$

$$2007 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 \Rightarrow a_2 = 669. (2p)$$

$$2. g(-x) = f(-x) - f(x) (1p) \text{ Finalizare. } (2p)$$

$$3. A\left(-\frac{1}{a}, 0\right) \text{ este punctul de intersecție. } (1p) \quad -\frac{1}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a^2 = 1. (1p) \text{ Avem } f(a) = a^2 + 1 = 2 (1p).$$

$$4. 1 = x_v. (1p) \quad 1 = -\frac{-m}{2} \Rightarrow m = 2. (1p) \quad f(1) = 0 (1p)$$

$$5. a > 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{a}, \text{ fals. } (1p) \text{ Deci } a < 0 \text{ și } x \leq -\frac{2}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{a}\right]. (1p) \text{ Atunci } a = -2. (1p)$$

$$6. x_v = m. (1p) \quad y_v = f(x_v) = f(m) = -m^2 + m. (1p) \quad x_v = y_v \Rightarrow m = 0. (1p)$$

$$7. G \text{ este centrul de greutate al triunghiului } MNP. (1p) \text{ Atunci } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}. (2p)$$

$$8. \text{ Avem } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. (1p) \quad \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = 1. (1p) \text{ Deducem } B = 90^\circ. (1p)$$

$$9. \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}. (2p) \text{ Atunci } \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}. (1p)$$

$$10. \text{ Fie } N \text{ mijlocul lui } BC. \text{ Atunci } 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}. (2p) \text{ De aici } 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}. (1p)$$

SUBIECTUL III.

$$1. \text{ Soluțiile sunt } x_1, x_2, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \text{ deci } x_i = \pm 1. (1p) \text{ Din } x_1 + x_2 = -a < 0 \text{ rezultă } x_1 = x_2 = -1, \text{ deci } a = -2, b = 1. (1p)$$

$$2. f^2(2008) + f^2(2009) = 1, f^2(2009) + f^2(2010) = 1 \Rightarrow f^2(2008) = f^2(2010) (1p) \text{ Cum } f(x) \geq 0, \text{ rezultă concluzia. } (1p)$$

$$3. \text{ Fie } G' \text{ centrul de greutate al triunghiului } ABD. \text{ Atunci } \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}. (1p) \text{ Cum } \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \text{ rezultă}$$

$$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}. (1p)$$

$$4. \cos C = \cos(180^\circ - 2B) \Rightarrow C = 180^\circ - 2B (1p). \text{ Atunci } C + 2B = A + B + C \Rightarrow A = B (1p).$$

$$5. b^2 = ac \text{ și } \frac{1}{2} = \cos B = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac} \Rightarrow (a - c)^2 = 0 (1p)$$

Atunci $a = c$, deci triunghiul este isoscel cu un unghi de 60° , de unde concluzia. (1p)

- ♦ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a X-a – TC+CD 4 ore

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	D.	C.	C.	B.	C.	B.	A.	D.	E.	B.

Subiectele II și III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II.

1. $a = 0$. (2p) În caz contrar, $\sqrt{5} = \frac{a\sqrt{5}}{a} \in \mathbb{Q}$, fals. (1p)

2. $a_{2008} = S_{2008} - S_{2007} = (2p) = -2007$. (1p)

3. Sunt $3 \cdot 5 = 15$ drepte secante celor 2 date. (2p) În plus, avem d_1 și d_2 . În total sunt 17 drepte (1p).

4. $2 = x_V = -\frac{-m}{2} \Rightarrow m = 4$. (1p) $a = f(2) = -1$. (2p)

5. $x_1 x_2 = m^2 - 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 1$. (2p) Cum $m \in \mathbb{Z}$, avem $m = 0$. (1p)

6. $D = A \Rightarrow \overline{AB} = q \overline{AC}$. (1p) $D = C \Rightarrow \overline{CB} = p \overline{CA}$. (1p) Prin scădere, $\overline{AC} = (p + q) \overline{AC}$, deci $p + q = 1$. (1p)

7. $2R = \frac{BC}{\sin A}$. (2p) Atunci $R = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$. (1p)

8. Fie O centrul dreptunghiului. Avem $MO^2 = \frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{MB^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$. (1p) Cum $AC = BD$, deducem $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 = 2$. (2p)

9. $\sin B = \frac{3}{5}$. (1p) Atunci $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{24}{25}$. (2p)

10. $AM \perp BC$; $G \in AM \Rightarrow GM \perp BC$. (1p) Atunci $\overline{GM} \cdot \overline{BC} = 0$. (2p)

Subiectul III.

1. $a_{2n^2+2n} = 16n^2 + 16n + 4 = (4n + 2)^2$. (1p) 4 divide a_n , dar 8 nu divide, deci nu avem cuburi perfecte. (1p)

2. Fie $S_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. Numerele $3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 6x + 4 = 0$, de unde $S_{n+2} = 6S_{n+1} - 4S_n$. (1p) Cum $S_1 = 6, S_2 = 28$, prin inducție rezultă concluzia. (1p)

3. $f^3(x-1) + f^3(x+1) = 2 = f^3(x+1) + f^3(x+3)$. (1p) $f(x-1) = f(x+3) \Rightarrow f(x) = f(x+4), \forall x \in \mathbb{R}$. (1p)

4. Fie $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$. Rotim în jurul lui O cu 72° ; fie \vec{v} rotitul lui \vec{u} . Avem $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = \vec{v}$ (1p). Atunci $\vec{u} = \vec{0}$, altfel direcția lui \vec{u} nu ar coincide cu cea a lui \vec{v} (1p).

Alternativ, proiectăm pe 2 axe perpendiculare.

5. $\sum \frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} = 4R \sum \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 4R \sum \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = 4R \sum \frac{p(p-a)}{S} = \frac{4Rp^2}{S} = \frac{4Rp}{r}$ (1p)

Atunci $\frac{4Rp}{r} = 8p \Rightarrow R = 2r$, de unde concluzia. (1p)

- Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a XI-a – M1

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	A.	A.	C.	D.	B.	D.	A.	D.	B.	A.

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II.

1. Inducție după n : pentru $n = 1$ afirmația este evidentă (1 p); dacă relația este adevărată pentru un n oarecare și orice x , atunci $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x)(1 + nx) \geq 1 + (n + 1)x$ (2 p).

2. Ecuația este $(2 + \sqrt{3})y + \frac{1}{y}(2 - \sqrt{3})^{-1} = 8 + 4\sqrt{3}$ (1 p), adică $y^2 - 4y + 1 = 0$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$ (1 p); $x = \pm 1$ (1 p).

3. Dacă $\Delta \geq 0$ atunci $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ și din $x_1 x_2 = 4$ rezultă $x_1 = x_2 = \pm 2$, $m = \mp 4$ (1 p); dacă $\Delta < 0$ atunci $x_2 = \overline{x_1}$, deci $|x_2| = |x_1|$ și, în final, $m \in [-4; 4]$ (2 p).

4. $x^2 = -3 \pm 4i$ (1 p); $|x^2| = 5$, deci $x_{1,2}$ și $x_{3,4}$ au modulele $\sqrt{5}$ și sunt opuse (1 p); avem un patrulater cu diagonale congruente și care se taie în părți egale (1 p).

5. Ecuația $f(x) = y$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ are soluția unică $x = \log_2 \left(1 + 2^{\frac{y-1}{3}}\right)$ (2 p), deci funcția este inversabilă și $f^{-1}(x) = \log_2 \left(1 + 2^{\frac{x-1}{3}}\right)$ (1 p).

6. Există 9000 de numere de 4 cifre (1 p); împărțind numerele în grupe de câte 10 de forma $\overline{abc0}, \overline{abc1}, \overline{abc2}, \dots, \overline{abc9}$ reiese că exact jumătate din ele au suma cifrelor pară (1 p); în total sunt 4500 de numere cu proprietatea cerută (1 p).

7. $\log_{\frac{1}{2}} x(x+1) > \log_{\frac{1}{2}} 2$ (1 p); $x^2 + x - 2 < 0$ (1 p); cum $x > 0$ obținem $x \in (0, 1)$ (1 p).

8. $N = 2(3^{2008} + C_{2008}^2 5 \cdot 3^{2006} + C_{2008}^4 5^2 \cdot 3^{2004} + \dots)$ (2 p), de unde concluzia (1 p).

9. Centrul pătratului este $M(3; 2)$ (1 p); din $\overrightarrow{MD} = 2\vec{i} - \vec{j}$ rezultă $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC} = \pm(\vec{i} + 2\vec{j})$ (1 p), deci $A(4; 4), C(2; 0)$ sau $C(4; 4), A(2; 0)$ (1 p).

10. Vârfurile sunt $(1; 0), (1; 1)$ și $(0; 1)$ (2 p), deci aria este $\frac{1}{2}$ (1 p).

Subiectul III

1. $P_k = k!$ (1 p); $\sum_{k=1}^{2008} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{2008} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{2008} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{2009!} < 1$ (1 p).

2. Oricărui rezultat $1 \leq a < b < c \leq 20$ fără numere consecutive îi asociem şirul strict crescător $1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 18$ şi reciproc (1 p); sunt $C_{18}^3 = 816$ asemenea şiruri (1 p).

3. Notăm $x = b + c - a > 0, y = a + c - b > 0, z = a + b - c > 0$ (1 p); inegalitatea devine

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3, \text{ adică } \underbrace{\frac{y}{x} + \frac{x}{y}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{z}{x} + \frac{x}{z}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{y}{z} + \frac{z}{y}}_{\geq 2} \geq 6 \text{ (1 p)}.$$

4. Dacă există x_0 astfel încât $f(x_0) < x_0^2$, atunci ecuaţia $f(x) = 2x_0x - 2x_0^2 + f(x_0)$ are soluţia x_0 , pe când ecuaţia $x^2 = 2x_0x - 2x_0^2 + f(x_0)$ nu are soluţie – contradicţie (1 p); rezultă astfel $f(x) \geq x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Acum, dacă există x_0 astfel încât $f(x_0) > x_0^2$, atunci ecuaţia $x^2 = 2x_0x - x_0^2$ are soluţia x_0 , pe când ecuaţia $f(x) = 2x_0x - x_0^2$ nu are soluţie (deoarece $f(x_0) > x_0^2$ şi, pentru $x \neq x_0$, $f(x) \geq x^2 > 2x_0x - x_0^2$) – contradicţie (1 p).

5. Dacă $2x - 3y = a, 3x - 4y = b$, atunci $x = 3b - 4a, y = 2b - 3a$, deci fiecare soluţie a sistemului corespunde unei perechi de întregi (a, b) pentru care $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq 20$ (1 p); există $20 + 19 + 18 + \dots + 1 = 210$ asemenea perechi (1 p).

◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a XI-a – M2

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	B.	D.	E.	D.	C.	A.	A.	E.	B.	B.

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II.

- Pentru $n = 1$, egalitatea $1^2 = (-1)^2 \frac{1^2 + 1}{2}$ este valabilă (1 p); $1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n+2}(n+1)^2 = 1^2 + \dots + (-1)^{n+1}n^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2$ (1 p); $= (-1)^{n+1} \frac{n^2 + n}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2 = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (1 p).
- $2 \cdot 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 18 = 0$ (1 p); $y^2 - 10y + 9 = 0$ (1 p); $x_1 = 0, x_2 = \log_2 9$ (1 p).
- $x + 1 - 2\sqrt{x} = 1$ (1 p); $x^2 = 4x, x \geq 0$ (1 p); $x_1 = 0, x_2 = 4$ (1 p).
- $x = \log_2 \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{7}{8}$ (1 p); $x = \log_2 \frac{1}{8}$ (1 p); $x = -3 \in \mathbb{Q}$ (1 p).
- Ecuția $f(x) = y, x > 1, y \in \mathbb{R}$ are soluția unică $x = 1 + 3^{\frac{y}{2}}$ (2 p), deci funcția este inversabilă și $f^{-1}(x) = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$ (1 p).
- Un triunghi este dat de 3 vârfuri din cele 6 (1 p); sunt $C_6^3 = 20$ triunghiuri (2 p).
- $x_1 = \frac{(1-3i)(1-i)}{2} = -1-2i$ (1 p); $x_2 = -1+2i$ (1 p); o ecuație este $x^2 + 2x + 5 = 0$ (1 p).
- O soluție este $x = 1$ (1 p); datorită monotoniei, aceasta este unică (2 p).
- Din paralelism $\frac{3}{m} = \frac{4}{1}$, deci $m = \frac{3}{4}$ (1 p); distanța de la punctul $(-1,1)$ aparținând primei drepte la cea de-a doua este $\frac{|4n+1|}{5}$ (1 p), deci $n = 1$ sau $n = -\frac{3}{2}$ (1 p).
- $AB = 4\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{2}, BC = 2\sqrt{10}$ (1 p); triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza BC , deci $R = \frac{1}{2}BC = \sqrt{10}$ (2 p).

Subiectul III

- Dacă $a = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$ și $b = \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$, atunci $ab = -3$ și $a^3 + b^3 = 10$ (1 p); notând $s = a + b$ avem $s^3 - 3abs = 10$, adică $s^3 + 9s = 10$, cu soluția unică $s = 1$ (1 p).

2. $x_1 = \frac{\pi}{2}$ (1 p); $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ (1 p).

3. Dacă $x \leq y$, împărțind cu y^{mn} obținem $(t^m + 1)^n \leq (t^n + 1)^m$, cu $t = \frac{x}{y} \leq 1$ (1 p); avem $1 < t^m + 1 \leq t^n + 1$ și $n \leq m$, deci concluzia (1 p).

4. $a = 2^{2008} + C_{2008}^2 2^{2008} \cdot 3 + \dots + 3^{1004}$, $b = C_{2008}^1 2^{2007} + C_{2008}^3 2^{2005} \cdot 3 + \dots + C_{2008}^{2007} 3^{1003}$, unicitatea reiese din $\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (1 p); avem $a - b\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{2008}$, deci $(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = 1$ (1 p).

5. $\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9}$ și $\sqrt{x^2 + y^2 + 8y + 16}$ sunt distanțele de la punctul de coordonate (x, y) la punctele $A(3; 0)$ și $B(0; -4)$ (1 p); suma acestor distanțe este cel puțin $AB = 5$ (1 p).

◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a XII-a – M1

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C.	D.	B.	B.	A.	C.	E.	C.	E.	E.

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II.

1. Limita este 1.(2p)

Justificare (1p)- spre exemplu, criteriul raportului.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. (1p) Dreapta $y = a$ este asimptotă. (1p) $a = 1$. (1p)3. $f^{IV}(x) = e^x > 0 \Rightarrow f'''(x) = e^x - 1$ este crescătoare. (1p)Cum f''' se anulează în 0, $f''(x) = e^x - x$ este pozitivă. (1p)Atunci $f'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$ este crescătoare și se anulează în 0. Deducem că 0 este punct de minim al lui f (1p).4. $\lim_{x \nearrow 1} \frac{(-1)^{[x]}}{x^2 - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(-1)^0}{(x-1)(x+1)} = -\infty$. (1p) $\lim_{x \searrow 1} \frac{(-1)^{[x]}}{x^2 - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(-1)^1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$. (1p)Limita este $-\infty$. (1p)5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$. (1p) Continuitatea revine la $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (1p) Deci $a = 2$. (1p)6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$. (1p)7. $AB = \begin{pmatrix} 2+a & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$. (1p) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a & 2+a \end{pmatrix}$. (1p) Deci $a = 0$. (1p)8. $\det A = 0$. (1p) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. (1p) Deci rangul este 2. (1p)9. $\det A = -7$; $A \cdot A^* = -7I_3$. (1p) Atunci $\det A \cdot \det A^* = -7^3$. (1p) Deci $\det A^* = 49$. (1p)10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. (1p) Conform teoremei Kronecker (1p), sistemul este incompatibil. (1p)

Subiectul III.

1. $f(x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $f(x) = \pi - x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. (1p)

$f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, de unde concluzia. (1p)

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \sin \frac{t}{1+t}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{\sin \frac{t^2}{2(1+t)} \cdot \cos \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}}{t^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ (2p)

3. Sunt $n-1$ permutări. (1p) Justificare –inducție sau altfel. (1p)

4. Fie A, B, C punctele de coordonate $(\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta), (\cos \gamma, \sin \gamma)$. Modulul determinantului este dublul ariei triunghiului (1p). Aria maximă a unui triunghi înscris în cercul unitate este cea a triunghiului echilateral, de unde concluzia (1p).

5. Punctele 0 și 1 sunt de minim pentru f , deci conform teoremei lui Lagrange avem $f'(0) = f'(1) = 0$. (1p) Din teorema lui Rolle rezultă derivata lui f' se anulează pe $(0,1)$. (1p)

◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA 1 – PREDICTIVĂ – 18.10.2008

CLASA a XII-a – M2

Barem de corectare și notare

Subiectul I

- ♦ Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie punctajul maxim (5 puncte), fie 0 puncte.
- ♦ Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	D.	C.	D.	B.	D.	D.	C.	B.	E.	C.

Subiectele II și III

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul II.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \infty$ (2p), deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (1p)
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$. (1p) Dreapta $y = 1$ este asimptotă spre $\pm\infty$. (1p) Funcția este continuă, deci nu are asimptote verticale. (1p)
- $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = 2 \frac{x^3 - 1}{x^2}$ se anulează în 1. (1p) Din semnul derivatei deducem că 1 este punct de minim al lui f (2p).
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x - \cos 1}{x - 1} = \cos'1 = (2p) = \sin 1$. (1p)
- $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. (1p) Derivata se anulează în ± 1 . (1p) Din semnul derivatei deducem că f este crescătoare pe $(-\infty, 1]$ și pe $[1, \infty)$ și descrescătoare pe $[-1, 1]$. (1p)
- $f''(x) = 12x - 8$. (1p) Derivata a doua se anulează în $\frac{2}{3}$ (1p). Din semnul acesteia avem $\frac{2}{3}$ punct de inflexiune. (1p)
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (1p) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (1p) $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB - BA)^{2008} = I_2$. (1p)
- $x = 1$. (1p) $y = 1$. (1p) $z = 2$. (1p)
- $\det A = -4 - 2m$. (1p) $m = -2$. (2p)
- Fie $B = A - A'$. Avem $B = -B'$. (1p) Atunci $\det B = \det(-B') = -\det B' = -\det B$ (1p), deci $\det(A - A') = 0$. (1p)

Subiectul III.

- $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$. (1p)
 $f''(x) > 0, \forall x > 1$, de unde concluzia. (1p)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3 \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \frac{1}{6}$. (2p)

3. $\det A = 0$; **(1p)** $A \cdot A^* = (\det A)I_3 = O_3$. **(1p)**

4. Fie A, B, C trei vârfuri de coordonate $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$. Modulul determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ este dublul

ariei triunghiului **(1p)**. Cum $\Delta \in \mathbb{Z}^*$, avem $S[ABC] \geq \frac{1}{2}$. Analog $S[BCD] \geq \frac{1}{2}$, de unde concluzia **(1p)**.

5. $f \equiv 1$ sau $f \equiv -1$. **(1p)** Altfel, dacă f ia ambele valori, f are o rădăcină în \mathbb{R} , fals. **(1p)**

◆ Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.