



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

### ETAPA a III-a – 9.05.2009

**CLASA a XII-a – M1**

### Barem de corectare și notare

#### Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C	A	A	C	B	C	C	C	D	B

#### Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. Aria este egală cu  $\int_1^3 (x^2 - 1) dx$  (1 punct)  $= \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3$  (1 punct)  $= \frac{20}{3}$  (1 punct).

2. Volumul este  $\pi \int_0^a (x^2 + 1) dx$  (1 punct)  $= \pi \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^a = \pi \frac{a^3 + 3a}{3}$  (1 punct). Atunci

$$\pi \frac{a^3 + 3a}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow a^3 + 3a = 4 \Rightarrow a = 1 \text{ (1 punct).}$$

3. Fie  $F$  o primitivă a funcției  $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ . (1 punct) Atunci  $f(x) = F(x^2) - F(0)$  (1 punct) și  $f'(x) = F'(x^2) \cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^6}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . (1 punct).

4. Folosind  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \tan^2 x + 1$  (1 punct), avem  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + 2} dx =$  (1 punct)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (1 punct).}$$

5. Folosind l'Hospital (1 punct), avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \arctg x}{2x} \text{ (1 punct)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = 0 \text{ (1 punct).}$

6. Fie  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{C}$  rădăcinile lui  $f$ . Avem  $s_1 = \sum_{i=1}^5 x_i = 3, s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j = 5$  (1 punct),

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = s_1^2 - 2s_2 = 9 - 10 = -1$  (1 punct), deci  $f$  nu are toate rădăcinile reale (1 punct).

7. Avem  $1-i$  rădăcină a lui  $f \in \mathbb{R}[X]$ , deci și  $1+i$  e rădăcină a lui  $f$  (2 puncte). Fie  $x_3$  a treia rădăcină. Atunci  $1-i+1+i+x_3=3 \Rightarrow x_3=1$  (1 punct).

8. Pentru orice  $x \in \mathbb{Z}_5^*$  avem  $x^4 = \hat{1}$  (1 punct). Atunci  $f(x) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{4} + ax = \hat{0} \Leftrightarrow ax = \hat{1}$  (1 punct). Cum  $a$  este inversabil, fiind nenul, rezultă că  $a^{-1}$  este rădăcină a lui  $f$  (1 punct).

9. 1 este rădăcină; aplicând schema lui Horner obținem  $(x-1)(x^4 - 2x^3 + 2x - 1) = 0$  (1 punct). Cum  $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3$  (1 punct), rezultă că 1 este rădăcină cvadruplă și  $-1$  este rădăcină simplă.

10. Avem  $f(\hat{0}) = \hat{2}, f(\hat{1}) = \hat{2}, f(\hat{2}) = \hat{2}$  (1 punct), deci  $f$  nu are rădăcini în  $\mathbb{Z}_3$  (1 punct) și  $\text{grad}(f) = 3$ , deci polinomul este ireductibil în  $\mathbb{Z}_3$  (1 punct).

### Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.  
Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Fie  $F(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t \cos t}{1+e^t} dt, x \in \mathbb{R}$ . Avem  $F'(x) = \frac{e^x \cos x}{1+e^x} + \frac{e^{-x} \cos(-x)}{1+e^{-x}} = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$  (1 punct). Atunci  $F(x) = \sin x + c$  și cum  $F(0) = 0$  (0,5 puncte) rezultă  $F(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$  (0,5 puncte).

2. Aria este egală cu  $F(a) = \int_0^a e^{x^2} dx$ . Funcția  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este strict crescătoare, deoarece

$F'(a) = e^{a^2} > 0, \forall a \geq 0$ . (1 punct). Deoarece  $F(0) = 0$  și  $F(a) = \int_0^a e^{x^2} dx \geq \int_0^a 1 dx = a \rightarrow \infty$  (0,5 puncte), rezultă din continuitatea lui  $F$  că  $F([0, \infty)) = [0, \infty)$ , deci există  $a > 0$  cu  $F(a) = e^2$  (0,5 puncte).

3. Deoarece  $f'(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (0,5 puncte) și mulțimea zerourilor derivatei nu conține niciun interval, rezultă că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$  (0,5 puncte). Cum toate rădăcinile sunt reale, înseamnă că  $f$  are o rădăcină triplă. Din  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$  (0,5 puncte), deci

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$  (0,5 puncte).

4. Deoarece  $u - v$  divide  $f(u) - f(v), \forall f \in \mathbb{Z}[X]$  (1 punct), dacă ar exista un polinom cu proprietatea cerută am avea  $5 = 9 - 4 \mid f(9) - f(4) = 5 - 9 = -4$ , fals (1 punct).

5. Avem  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , deci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Cum rădăcinile sunt întregi, rezultă că  $f$  are rădăcini simple (1 punct). Din șirul lui Rolle rezultă că 0 este rădăcină (0,5 puncte), deci  $a = 0$  (0,5 puncte).

Alternativ:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1x_2 = 0 \Rightarrow a = -x_1x_2x_3 = 0$ .

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.

Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.