



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

### ETAPA a III-a – 9.05.2009

**CLASA a X- a – TC+CD 4ore**

### Barem de corectare și notare

#### Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	E	C	E	D	B	E	D	E	E	A

#### Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.  
 Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

- $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$  (1 punct);  $f(1) = f(\sqrt{3})$  (1 punct);  $f(1) - f(\sqrt{3}) = 0$  (1 punct).
- Observăm că  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}$  (2 puncte). Suma este 15 (1 punct).
- $\frac{15!}{2!3!10!} = \frac{15!}{5!10!} \cdot \frac{5!}{2!3!}$  (1 punct)  $= C_{10}^5 C_5^2 \in \mathbb{N}$  (2 puncte).
- Avem  $\arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, x \in [0, 1] \Rightarrow 1-x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$  (1 punct)  
 $\Rightarrow 1-x = \cos(\arcsin x) \Rightarrow 1-x = \sqrt{1-x^2}$  (1 punct). Obținem  $x = 0, x = 1$  (1 punct).
- Ecuția se scrie  $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  (1 punct)  $\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (1 punct)  
 $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (1 punct).
- Sunt 6 termeni în dezvoltare.  $T_{k+1} = C_5^k 5^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = C_5^k 5^{5-2k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$  (1 punct). Pentru  
 $k \leq 2 \Rightarrow 5-2k > 0$ , termenii sunt numere naturale,  $T_4 = \frac{C_5^3}{5} = 2 \in \mathbb{N}$ , iar ceilalți doi termeni nu. (1 punct).  
 Probabilitatea este  $\frac{2}{3}$  (1 punct).

- Avem  $(2 + \sqrt{3})^{1000} = a + b\sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{1000} = a - b\sqrt{3}$ , folosind binomul lui Newton (2 puncte). Atunci  
 $(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^{1000} (2 - \sqrt{3})^{1000} = (4 - 3)^{1000} = 1$  (1 punct).

$$8. \quad (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \sqrt{2}^k + \sum_{k=0}^n C_n^k (-\sqrt{2})^k \quad (2 \text{ puncte}) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2m} 2^m \in \mathbb{Z} \quad (1 \text{ punct}).$$

$$9. \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \quad (1 \text{ punct})$$

$$= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \quad (1 \text{ punct}) = n 2^{n-1} \quad (1 \text{ punct}).$$

10. Fie  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^3$ . Funcția  $h$  este bijectivă (1 punct), iar  $g = f \circ h$  (1 punct), de unde rezultă cerința (1 punct).

### Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător. Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Fie  $T > 0$  perioada principală. Atunci  $f(T) = f(0) = 0 \Rightarrow \sin T + \sin 2T = 0$  (0,5 puncte). Rezultă  $\sin T + 2 \sin T \cos T = 0 \Rightarrow \sin T = 0$  sau  $\cos T = -\frac{1}{2}$  (0,5 puncte). Obținem  $T = \frac{2\pi}{3}, \pi, \dots$ . Verifică

$T = \pi$  (1 punct).

Alternativ, observăm că funcția  $\sin$  are perioada  $2\pi$ , funcția  $\sin 2x$  are perioada  $\pi$ , de unde  $T = \pi$ .

2. Dintre numerele  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(10)$ , două sunt egale cu 1, iar celelalte opt cu 0 (1 punct).

Sunt  $C_{10}^2$  modalități de a alege două egale cu 1 din secvența anterioară, deci avem 45 de funcții (1 punct).

3. Egalitatea revine la  $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}, \forall x \in [-1, 1]$  conform injectivității funcției  $\sin$  pe intervalul

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (0,5 puncte). Avem  $\sin(2 \operatorname{arctg} x) = 2 \sin(\operatorname{arctg} x) \cos(\operatorname{arctg} x)$  (0,5

puncte)  $= 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$  (1 punct).

4. Fie  $X$  o submulțime cu  $k$  elemente a lui  $\{1, 2, \dots, n\}$ ;  $X$  poate fi aleasă în  $C_n^k$  moduri. Mulțimea  $Y$  conține în mod necesar complementara lui  $X$  în  $\{1, 2, \dots, n\}$  și, eventual o submulțime a lui  $X$  (0,5 puncte), deci avem  $2^k$  posibilități de a alege mulțimea  $Y$  cu proprietatea cerută (0,5 puncte). Numărul perechilor este

$$\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \quad (0,5 \text{ puncte}) = (1+2)^n = 3^n \quad (0,5 \text{ puncte}).$$

5. Ordonăm elevii clasei, fapt posibil în  $30!$  moduri (0,5 puncte). Cuplăm elevii câte doi, formând 15 perechi; primul cu al doilea, al treilea cu al patrulea, etc. Obținem perechile cerute, însă fiecare pereche este ordonată, deci numărată de două ori (0,5 puncte), iar perechile sunt ordonate în  $15!$  moduri (0,5 puncte).

Numărul cerut este prin urmare  $\frac{30!}{15! \cdot 2^{15}} = 29!!$  (0,5 puncte).

Alternativ, alegem o pereche în  $C_{30}^2$  moduri, din cei 28 rămași alegem o pereche în  $C_{28}^2$ , șamd. Obținem  $C_{30}^2 C_{28}^2 \cdots C_2^2$  moduri, și împărțind la  $15!$  găsim numărul cerut.