



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a II-a

SOLUȚII

10p din oficiu

1.a)	104	10p
b)	9 numere (170, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179)	10p
2.a)	238	10p
b)	Se urcă toți trei, rețin cât arată cântarul, apoi unul dintre ei coboară. Masa celui care a coborât este egală cu diferența dintre cât arăta cântarul înainte de a coborî și cât arată cântarul după ce a coborât. În același mod procedează și ceilalți doi copii.	10p
3.	Justificare $5 + 6 - 2 = 9$ lei	10p
4.a)	O soluție ar putea fi: $1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11 + 12$	15p
b)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ..., 31. Dacă ștergem, la întâmplare, două numere, iar în locul lor punem un număr cu 1 mai mic decât suma celor două numere, suma numerelor de pe tablă se micșorează cu 1. După 30 astfel de operații, numărul rămas este cu 30 mai mic decât suma numerelor care erau scrise la început pe tablă: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 31 = 496$ $496 - 30 = 466$	7p 4p 4p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a III-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.a)	4000	10p
b)	118	10p
c)	54 numere	3p
	Justificare	2p
2.a)	25	10p
b)	$1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 23 = 23$; $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1986 \text{ de ori}} + 23 = 2009$ Sunt 1987 de numere.	10p 5p
3.	$10 \times 6 = 60$ (probleme pe care trebuia să le rezolve în cele 10 zile) $9 - 6 = 3$ (probleme rezolvate în plus în fiecare zi) $60 : 3 = 20$ (zile în care a lucrat câte 9 probleme) $20 \times 9 = 180$ (probleme pe care le-a avut de rezolvat Simona)	20p
4.	În final, pe tablă vor fi scrise toate numerele naturale de la 1 la 56. $56 - 2 = 54$ (numărul de numere scrise de cei doi copii) - număr par Dacă Paul a scris primul număr, Dana pe al doilea, Paul pe al treilea ș.a.m.d., Dana scrie al 54 - lea număr și câștigă.	20p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a IV-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.a)	60000	10p
b)	69999	10p
c)	Justificare $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$	2p 3p
2.a)	$a \cdot b = 15$ $a = 1, b = 15$ sau $a = 3, b = 5$ sau $a = 5, b = 3$ sau $a = 15, b = 1$	5p 5p
b)	$(1 + 31) : 2 = 16$ Numărul căutat se află pe linia a 16-a, coloana a 16-a. Ultimul număr de pe linia a 15-a este: $31 \cdot 15 = 465$. Numărul căutat este: $465 + 16 = 481$	5p 5p
3.	Dacă jucăriile au fost aduse în 4 saci, fiecare sac având același număr de jucării, numărul total de jucării este par. I pungă / / conține un număr par de jucării a II-a pungă / / 1 / impar a III-a pungă / / 2 / par a IV-a pungă / / 3 / impar a V-a pungă / / 4 / par Prima persoană ia punga a IV-a, iar a doua persoană ia I, a III-a și a IV-a pungă. A II-a pungă conține 15 jucării. / / = 14 $14 \cdot 5 + 10 = 80$ $80 : 4 = 20$ (jucării în fiecare din cei 4 saci)	10p 10p
4.a)	Primii 7 termeni: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28.	10p
b)	Niciun număr din șir nu se împarte exact la 3: $1 : 3 = 0$ rest 1 $2 : 3 = 0$ rest 2 $4 : 3 = 1$ rest 1 $8 : 3 = 2$ rest 2 $16 : 3 = 5$ rest 1 $23 : 3 = 7$ rest 2 $28 : 3 = 9$ rest 1 ... $17172 : 3 = 5724$ Numărul 17172 nu face parte din șir.	10p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a V-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.a)	$(2,58 - 1,75 + 0,25) : 0,4 \cdot 10 = 1,08 : 0,4 \cdot 10 =$ $= 2,7 \cdot 10 = 27$	10p
b)	$x = (448 - 416) : 2 \Rightarrow x = 16$ $448 - 16 = 432$ $27 \cdot 16 = 432$ $6912 : 16 = 432$, deci există $x = 16$	5p
c)	$\frac{ab}{cb} = \frac{ab}{10} \Rightarrow \overline{cb} = 10$, adică $c = 1$ și $b = 0$	3p
	Numărul elementelor mulțimii M este 9	2p
d)	$x = 102 \cdot a + \frac{a}{3}$ cu $\frac{a}{3} < 102$ $x = \frac{307a}{3}$ cu $a \in \{0, 3, 6, 9, \dots, 303\}$, deci $S = 307(0 + 1 + 2 + \dots + 101) = 307 \cdot 101 \cdot 51 = 1581357$	2p
2.	$24 : 2 = 12$ $12 \times 4 = 48$ $12 + 48 = 60$ $60 : 4 \times 3 = 45$ $45 \times 4 = 180$ $180 + 15 = 195$	20p
3.	$\frac{0,1234}{0,5151} < \frac{0,1234567\dots 495051}{0,515049\dots 7654321} < \frac{0,1235}{0,5150}$ $\frac{0,1234}{0,5151} = 0,2395\dots$ $\frac{0,1235}{0,5150} = 0,2398\dots$ deci primele trei zecimale ale numărului N sunt 2, 3, 9	10p
4.	$A = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot \dots \cdot 4017 \cdot 4018}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2009} =$ $= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 4017) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 4018)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2009} =$ $= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 4017) \cdot 2^{2009} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2009)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2009} =$ $= (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 4017) \cdot 2^{2009}$	20p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a VI-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.	Suma elementelor din mulțimea A este egală cu 5050. Presupunem că sumele elementelor din cele trei submulțimi sunt egale cu $102m$, $203n$ și $304p$, unde m , n și p sunt numere naturale nenule. Avem $102m + 203n + 304p = 5050$. Deducem că $m \leq 44, n \leq 22, p \leq 15$, deci $0 < m + n + p \leq 81$. Pe de altă parte, $m + n + p + 101 \cdot (m + 2n + 3p) = 5050$, adică $m + n + p$ se divide cu 101. Ajungem la contradicție.	5p 20p
2.	<p>a) Avem $m(\sphericalangle BIC) = 90^\circ + \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$. Triunghiul CEI este congruent cu triunghiul CDI și, deasemenea, triunghiul BFI este congruent cu triunghiul BDI. Obținem:</p> $m(\sphericalangle AEI) = m(\sphericalangle EIC) + m(\sphericalangle ECI) = m(\sphericalangle DIC) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle ACB).$ <p>Analog,</p> $m(\sphericalangle AFI) = m(\sphericalangle BID) + \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC).$ <p>În final,</p> $m(\sphericalangle AEI) + m(\sphericalangle AFI) = m(\sphericalangle BIC) + \frac{1}{2}(m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 180^\circ.$ <p>b) Dreptele CI și BI sunt mediatoare în triunghiul DEF, deci triunghiul IEF este isoscel. Obținem $m(\sphericalangle FIE) = 360^\circ - 2m(\sphericalangle BIC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC)$. Deci,</p> $m(\sphericalangle FEI) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC).$ <p>Avem:</p> $m(\sphericalangle AEF) = 180^\circ - m(\sphericalangle FEI) - m(\sphericalangle IEC) = 180^\circ - m(\sphericalangle DAC) - m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle ACD).$ <p>Deci dreptele EF și BC sunt paralele.</p>	15p 10p
3.	Notăm cu a numărul de elevi din clasa a VI-a A și cu b numărul de elevi din clasa a VI-a B. Din relația $50\% \cdot a + 28\% \cdot b = 40\% \cdot (a + b)$, obținem $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$. Cum numărul 28% din b este număr natural, rezultă că $b_{\min} = 25$. Obținem: $a_{\min} = 30$. Rezultă $(a + b)_{\min} = 55$ elevi.	20p
4.	Fie a, b, c, d și e cele cinci elemente ale mulțimii A cu $a < b < c < d < e$. Cum $a + b < a + c < b + c \dots d + c < c + e < d + e$, deducem că $a + b = -19, a + c = -12$ și $c + e = 16, d + e = 23$. Deoarece avem numai șapte valori ale sumelor, din zece combinații, înseamnă că restul de șase perechi de numere dau sume din mulțimea $\{-5; 2; 9\}$. Deoarece trei perechi de numere, din cele șase rămase, nu pot da aceeași sumă, înseamnă că două dintre ele au suma -5 , două au suma 2 , iar celelalte două au suma 9 . Convin situațiile: $a + d = b + c < b + d = a + e < b + e = c + d$. Efectuând suma tuturor sumelor de câte două numere, obținem: $4(a + b + c + d + e) = 20$, deci $a + b + c + d + e = 5$. Deducem că $c = 1$ și apoi $b = -6, d = 8, a = -13, e = 15$.	20p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a VII-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.	<p>a) De exemplu $a = \frac{2}{7}, b = \frac{3}{7}, c = \frac{6}{7}$ verifică egalitatea.</p> <p>b) Demonstrăm că, în general, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Înmulțind cu 2 și trecând în membrul stâng, obținem $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$, inegalitate echivalentă cu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, adevărată pentru orice numere reale a, b, și c. Egalitatea se obține numai dacă $a = b = c$. Presupunem că $ab + bc + ca = 1 = a^2 + b^2 + c^2$, deci $3a^2 = 1$, adică $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, contradicție.</p>	7,5p
2.	<p>Avem :</p> $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + x + \sqrt{(x+1)^2 - x}} < \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + x + \sqrt{(x+1)^2}} = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$	15p
3.	<p>Dacă $m = 4$, atunci $n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$, care este pătrat perfect pentru oricare $n \in \mathbb{N}$. Considerăm că $n^2 + 8n + m^2 = p^2, p \in \mathbb{N}$. Atunci $n(n+8) = (p-m)(p+m)$. Pentru n impar, luăm $p-m=1$ și $p+m=n(n+8)$. Obținem $m = \frac{n^2 + 8n - 1}{2}$. Egalitatea cu 4 se obține pentru $n=1$. Imposibil. Pentru n par, luăm $p-m=2$ și $p+m = \frac{n(n+8)}{2}$. Obținem $m = \frac{n^2 + 8n - 4}{4}$. Egalitatea cu 4 se obține pentru $n=2$. Imposibil. În concluzie, pentru oricare $n > 2$, există două valori distincte ale lui m pentru care $n^2 + 8n + m^2$ este pătrat perfect.</p>	22,5p
4.	<p>a) Fixăm un punct O și trasăm un cerc de centru O și rază R. Pe cerc, considerăm punctul A. Cu deschiderea R în compas, pornind din A, marcăm pe cerc, în același sens, punctele A_1, A_2, A_3. Punctele A, O și A_3 sunt coliniare deoarece arcul AA_1A_3 are măsura de 180°.</p> <p>b) Este suficient să obținem un segment de lungime $R\sqrt{2}$. Considerăm punctul A pe cercul $C(O; R)$. Construim B, punctul diametral opus lui A și cercul $C(B; R)$. Punctul C este diametral opus lui O în $C(B; R)$. Fie $\{T\} = C(O; R) \cap C(B; R)$. Dacă $\{P\} = C(O; CT) \cap C(C; CT)$, atunci $PB = R\sqrt{2}$ din triunghiul dreptunghic PBO, $m(\angle B) = 90^\circ$, unde $PO = R\sqrt{3}$ și $BO = R$.</p>	7,5p
		15p



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a VIII-a

SOLUȚII 10p din oficiu

1.	<p>a) Înlocuind $m_h = \frac{2ab}{a+b}$ și $\frac{p_1}{p_2} = x$, obținem $x = \frac{b}{a}$.</p> <p>b) Presupunem că are loc egalitatea din enunț. Cum numerele $m_h = \frac{2ab}{a+b}$ și $\frac{a+b}{2} = \frac{s}{2}$ sunt raționale, rezultă că și numărul $\sqrt{ab} = p$ este rațional. Egalitatea devine $\frac{2p^2}{s} + p = \frac{s}{2}$ și este echivalentă cu $(s-p)^2 = 5p^2$. Deci $5 = \frac{(s-p)^2}{p^2}$. Tragem concluzia că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Contradicție.</p>	<p>7,5p</p> <p>15p</p>
2.	<p>Ecuția din enunț este echivalentă cu $(x^2 - 8)^2 - 90 \cdot 8 - x^2 + 2009 = 0$. Notăm $t = 8 - x^2$.</p> <p>Ecuția devine $t^2 - 90t + 2009 = 0$. Obținem soluțiile $t_1 = 41, t_2 = 49$.</p> <p>În final, $x_{1,2} = \pm 7$ și $x_{3,4} = \pm \sqrt{57}$</p>	<p>2,5p</p> <p>20p</p>
3.	<p>În configurația dată există cel puțin două cercuri, deoarece lungimea cercului înscris în triunghi este egală cu $\pi \frac{\sqrt{3}}{3} < 4$. Proiectăm toate cercurile pe una dintre laturile triunghiului.</p> <p>Dacă oricare cerc din configurație este singur situat între două drepte perpendiculare pe latura respectivă, atunci suma lungimilor proiecțiilor ar fi mai mică decât 1. Dar suma lungimilor proiecțiilor este egală cu $\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{\pi} = \frac{4}{\pi} > 1$. Contradicție. Deducem că există o perpendiculară pe latura respectivă secantă la două dintre cercuri.</p>	<p>7,5p</p> <p>15p</p>
4.	<p>Din teorema bisectoarei aplicată succesiv în triunghiurile ABC și ACD obținem că</p> $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \frac{1}{2}.$ <p>Fie P și Q simetricile punctelor F și D în raport cu punctul M. Punctele B, P și Q sunt coliniare iar triunghiurile BEP și BCQ sunt asemenea (LUL). Rezultă că $EP \parallel CQ$. Dar MN, fiind linie mijlocie în triunghiul DQC, este paralelă cu QC. Deci $EP \parallel MN$. Înseamnă că dreptele FE și NM se intersectează într-un punct O.</p> <p>Segmentul MO este linie mijlocie în triunghiul FPE, deci $OF = OE$.</p>	<p>2,5p</p> <p>10p</p> <p>10p</p>



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a IX-a, TC + CD (4 ore)

SOLUȚII

10p din oficiu

1. Observăm că pentru o pereche (X, Y) , cu $X, Y \subset A$, avem

$$|X \cap Y| + |\bar{X} \cap Y| + |X \cap \bar{Y}| + |\bar{X} \cap \bar{Y}| = |Y| + |\bar{Y}| = n, \text{ (10p)}$$

(unde \bar{X} este complementara lui X), iar perechile (X, Y) de submulțimi ale lui A se pot grupa în $\frac{1}{4} \cdot 2^n \cdot 2^n = 4^{n-1}$ astfel de cvadruple disjuncte. **(12,5p)**

2. Avem $\frac{a}{10+b^3+c^4} \leq \frac{a}{9+a^4+b^4+c^4}$ și analoagele; este, deci, suficient să arătăm că $4 \sum a \leq 9 + \sum a^4$, ceea ce rezultă din $a^4 - 4a + 3 = (a-1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0$. **(22,5p)**

3. Alegem două axe perpendiculare. Suma lungimilor proiecțiilor vectorilor pe cel puțin una dintre ele, **(7,5p)** fie aceasta a , este > 2 , căci altfel se contrazice ipoteza. **(5p)** Considerăm acum mulțimea A a vectorilor care fac un unghi ascuțit și mulțimea O a vectorilor care fac un unghi obtuz cu un versor al axei a . Suma lungimilor proiecțiilor vectorilor din A sau a lungimilor proiecțiilor vectorilor din O este > 1 , iar lungimea sumei vectorilor din A , respectiv O , este mai mare decât suma lungimilor proiecțiilor vectorilor din mulțimea respectivă. **(10p)**

4. Dacă, la un moment dat, greierele face un salt înapoi, atunci el ajunge într-un punct în care a mai fost.

Să presupunem acum că greierele nu face niciodată un salt înapoi. Fixăm câte un sistem de coordonate pe fiecare din drepte, având originea în punctul $a \cap b$ și unghiul dintre semidreptele „pozitive” de 1° . **(2,5p)** Notăm a_n, b_n abscisele punctelor A_n, B_n . Avem atunci relațiile

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}b_n \cos 1^\circ + b_n^2 &= 1 = a_n^2 - 2a_nb_n \cos 1^\circ + b_n^2, \\ b_{n+1}^2 - 2a_{n+1}b_{n+1} \cos 1^\circ + a_{n+1}^2 &= 1 = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}b_n \cos 1^\circ + b_n^2, \end{aligned}$$

de unde $a_{n+1} + a_n = 2b_n \cos 1^\circ$, $b_{n+1} + b_n = 2a_{n+1} \cos 1^\circ$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aceasta conduce la $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 4a_{n+1} \cos^2 1^\circ$, adică $a_{n+2} = 2a_{n+1} \cos 2^\circ - a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătăm că există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n = A \cos n^\circ + B \sin n^\circ$. Observăm că șirul $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ dat de $\alpha_n = A \sin n^\circ + B \sin n^\circ$ verifică relația $\alpha_{n+2} = 2 \cos 2^\circ \alpha_{n+1} - \alpha_n$. **(15p)** Astfel, este suficient să găsim $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_1 = \alpha_1$ și $a_2 = \alpha_2$, căci, în acest caz, șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ au aceiași primi doi termeni și verifică aceeași relație de recurență de ordin 2. În sfârșit, coeficienții A, B îi aflăm din sistemul $A \cos 1^\circ + B \sin 1^\circ = a_1$, $A \cos 2^\circ + B \sin 2^\circ = a_2$, care are soluție unică pentru orice a_1, a_2 .

Din cele de mai sus reiese că, dacă greierele nu face niciodată un salt înapoi, atunci el se întoarce în punctul de pornire după 720 de salturi. **(5p)**



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

CLASA a IX – a, TC (2 ore)

SOLUȚII

10p din oficiu

1. Dacă într-o progresie avem $a_1 > r_1$, atunci $a_1 - r_1$ este termen al unei alte progresii, deci $a_1 - r_1 = b_1 + nr_2$. **(12,5p)** În acest caz, numărul $a_1 - r_1 + r_1 r_2 = a_1 + (r_2 - 1)r_1 = b_1 + (n + r_1)r_2$ face parte din ambele progresii – contradicție. **(10p)**

2. Să presupunem contrariul. **(2,5p)** Atunci $b^2 < ac$, $c^2 < ab$, $a^2 < bc$. **(10p)** Reiese că numerele din membrul drept sunt pozitive și, prin înmulțire, $a^2 b^2 c^2 < a^2 b^2 c^2$ – contradicție. **(10p)**

3. Numerele x, y sunt soluțiile ecuației $t^2 - (6 - z)t + 9 - 6z + z^2 = 0$. **(12,5p)** Din $\Delta \geq 0$ rezultă $-3(z^2 - 4z) \geq 0$, deci $z \in [0, 4]$; analog avem $x, y \in [0, 4]$. **(10p)**

4. Fie $\sin^2 x \cos^2 x = y$. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ reiese:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x &= 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2y, \\ \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3y, \\ \sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x = 1 - 4y + 2y^2, \\ \sin^{10} x + \cos^{10} x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^4 x \cos^4 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - 5y + 5y^2. \end{aligned} \quad \textbf{(7,5p)}$$

Relația devine $a + b + c - (3a + 4b + 5c)y + (2b + 5c)y^2 = 1$ și este îndeplinită pentru orice y dacă $a + b + c = 1, 3a + 4b + 5c = 0, 2b + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 10, b = -15, c = 6$. **(15p)**



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a X-a – 4 ore

SOLUȚII

10p din oficiu

1. Fie $r = |a| = |b| = |c|$. Avem $|az^2| = |-bz - c| \leq |b||z| + |c|$, deci $r(|z|^2 - |z| - 1) \leq 0$, de unde $|z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **(12,5p)** Pe de altă parte, $|c| = |-az^2 - bz| \leq |a||z|^2 + |b||z| \Rightarrow r(|z|^2 + |z| - 1) \geq 0$, de unde $|z| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **(10p)**
2. Din prima ipoteză rezultă $g(n) \geq h(n), \forall n \in \mathbb{N}$ (1). Cum g este surjectivă, există n_0 natural cu $g(n_0) = 0$. Din (1) rezultă $h(n_0) = 0$. **(2,5p)** Apoi există $n_1 \neq n_0$ cu $g(n_1) = 1 \Rightarrow h(n_1) \leq 1$. Din injectivitatea funcției h obținem $h(n_1) = 1$. Inductiv, avem $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots \in \mathbb{N}$, distincte oricare două, cu $g(n_i) = h(n_i) = i, i \in \mathbb{N}$, adică $g(x) = h(x), \forall x \in \{n_0, n_1, \dots\} = A$. Deducem că h este surjectivă, deci bijectivă, adică $A = \mathbb{N}$. Atunci $g = h$, deci g este injectivă. **(20p)**
3. Vom arăta că $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p}$. În acest caz avem $p \mid C_{p-1}^a - C_{p-1}^b \Leftrightarrow p \mid (-1)^a - (-1)^b \in \{-2, 0, 2\} \Leftrightarrow (-1)^a - (-1)^b = 0 \Leftrightarrow 2 \mid a - b$. **(10p)** Într-adevăr, avem $C_{p-1}^k - (-1)^k = \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-k)}{k!} - (-1)^k = \frac{pm + (-1)^k k!}{k!} - (-1)^k = \frac{pm}{k!} \in \mathbb{N}$ și cum $(p, k!) = 1$ rezultă cerința. **(12,5p)**
4. Pe intervalul $[0, \infty)$, funcția din membrul stâng este strict descrescătoare, iar cea din membrul drept este strict crescătoare, deci avem cel mult o soluție – anume $x = 1$. **(10p)** Dacă $x \in [-1, 0)$, membrul stâng este supraunitar, iar cel drept subunitar, deci nu avem soluție. Dacă $x \in (-\infty, -1)$, scriem $\sin^{2x} a + \cos^{2x} a = \left(\frac{1}{\sin^2 a}\right)^{-x} + \left(\frac{1}{\cos^2 a}\right)^{-x} = (1 + \operatorname{ctg}^2 a)^{-x} + (1 + \operatorname{tg}^2 a)^{-x} \geq (1 + \operatorname{ctg}^2 a)^{[-x]} + (1 + \operatorname{tg}^2 a)^{[-x]} > 2 + [-x](\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{tg}^2 a) \geq 2 + 2[-x] > |x|$, deci nu avem soluții. În consecință, $x = 1$. **(12,5p)**



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ
ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a X-a – 3 ore

SOLUȚII
10p din oficiu

5. Presupunem că $\log_{2009} 2 = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{N}^*$. Atunci $2^b = 2009^a$, **(12,5p)** contradicție – membrul stâng este par, iar cel drept impar. **(10p)**
6. a) Avem $(3x-4y+1)^2 + (3x-4y+1) - 2(3y-2x-1)^2 = x^2 + x - 2y^2 = 1$. **(2,5p)** Rămâne să arătăm că $3x-4y+1, 3y-2x-1 \in \mathbb{N}^*$. Dacă prin absurd avem $3x-4y+1 \leq 0$, atunci $3x+1 \leq 4y \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 \leq 16y^2 = 8x^2 + 8x \Rightarrow (x-1)^2 \leq 0$. De aici $x=1$ și apoi $y=1$, fals. Asemănător obținem contradicție dacă $3y-2x-1 \leq 0$. **(4p)**
- b) Fie $(u, v) \in A$. Avem
- $$g((x, y)) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y = u-1 \\ -2x+3y = v+1 \end{cases} \Rightarrow x = 3u+4v+1 \in \mathbb{N}^*, y = 2u+3v+1 \in \mathbb{N}^*.$$
- Rămâne să observăm că $x^2 + x - 2y^2 = 0$ și $(x, y) \neq (1, 1)$. **(16p)**
7. Notăm $a_i = \log_2 x_i, i=1, 2, \dots, 41$. Avem $a_i \in [-1, 49]$ **(5p)** și $a_1 + a_2 + \dots + a_{41} = 0$. **(2,5p)** Atunci $(a_i + 1)(49 - a_i) \geq 0 \Leftrightarrow -a_i^2 + 49 + 48a_i \geq 0$, **(5p)** de unde, prin sumare, obținem $-(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{41}^2) + 49 \cdot 41 \geq 0 \Rightarrow 2009 \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{41}^2$. **(10p)**
8. Sunt 6 meciuri disputate între ultimele 4 clasate, deci cel puțin 6 puncte este suma scorurilor acestora, **(7,5p)** deci și scorul celui de-al doilea. Cum primul are maxim 7 puncte – din cele 7 partide jucate – arătăm că al doilea are exact 6 puncte. Într-adevăr, dacă ar avea 6,5 puncte, meciul dintre primii doi nu ar fi încheiat cu victoria primului clasat, în contradicție cu faptul că aceasta ar avea 7 puncte. **(5p)**
- Deducem că primul are 7 puncte, **(5p)** iar ultimii 4 clasati au împreună exact 6 puncte, deci toți au pierdut împotriva jucătorilor clasati pe locurile I-IV. **(5p)**



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a XI-a – M1

SOLUȚII 10p din oficiu

1. Avem $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{1+\sqrt{x_n}}$. Cu lema lui Stolz, (5p) rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n^3}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x_{n+1}^3} - \sqrt{x_n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(x_n + \frac{1}{1+\sqrt{x_n}} \right)^3} - \sqrt{x_n^3} \right). \text{ E suficient să calculăm}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(x + \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right)^3} - \sqrt{x^3} \right), \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty. \text{ (2,5p) Prin amplificare cu conjugata găsim}$$

limita egală cu $\frac{3}{2}$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x_n^3}}{n} = \frac{3}{2}$, conform definiției cu șiruri a limitelor de funcții. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{n^2} = \frac{9}{4}. \text{ (15p)}$$

2. Funcțiile f și f'' nu se anulează, și, având proprietatea lui Darboux, păstrează semn constant. (7,5p) Presupunem prin absurd că au semn contrar. Avem cazurile: f pozitivă și f concavă sau f negativă și f convexă. Înlocuind f cu $-f$, rămâne de analizat doar cazul f pozitivă și f'' concavă. Funcția f nu este constantă, altfel $f' = 0 \Rightarrow f'' = 0$, fals, deci există $a < b \in \mathbb{R}$, $f(a) \neq f(b)$. Fie $f(a) < f(b)$. Pentru $x \in (-\infty, a)$ avem

$$0 < f(x) \leq \frac{x(f(b) - f(a)) + af(b) - bf(a)}{b - a} \Rightarrow 0 < x(f(b) - f(a)) + af(b) - bf(a), \forall x < a. \text{ Trecând la}$$

limită $x \rightarrow -\infty$ obținem $0 \leq -\infty$, pentru că $f(b) - f(a) > 0$. Analog dacă $f(b) < f(a)$. (15p)

3. Matricea AB verifică ecuația $x^2 - tx = 0$, unde $t = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, deci are valorile proprii $t, 0, 0, \dots, 0$ -- ordinul de multiplicitate al lui 0 fiind $n-1$. (12,5p) Atunci

$$\det(I_n + AB) = P_{AB}(-1) = (0 - (-1))^{n-1}(t - (-1)) = 1 + t. \text{ (10p)}$$

4. a) Inducție după n . (7,5p)

b) Elementul de pe linia i și coloana j al matricei produs $A_n B$ este egal cu

$$-\sin \frac{(i-1)j\pi}{n+1} + 2 \sin \frac{ij\pi}{n+1} - \sin \frac{(i+1)j\pi}{n+1} = 4 \sin \frac{ij\pi}{n+1} \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}.$$

Scoatem factor comun pe coloana j numărul $4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}$ și obținem concluzia. (10p)

$$\text{c) Avem } \det(A_n B) = \det(A_n) \det(B) = (n+1) \det(B) = \left(4^n \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \det(B). \text{ Cum}$$

$\det(B) \neq 0$, rezultă cerința. (5p)



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a XI-a, M2

SOLUȚII 10p din oficiu

1. a) Fie $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = x$, $|A_i \setminus (A_j \cup A_k)| = a_i$, $|(A_j \cap A_k) \setminus A_i| = b_i$, $1 \leq i \leq 3$. Atunci

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_2+b_3+x & b_3+x & b_2+x \\ b_3+x & a_2+b_1+b_3+x & b_1+x \\ b_2+x & b_1+x & a_3+b_1+b_2+x \end{vmatrix} = \sum a_i [(a_2+b_3)(a_3+b_2) + (x+b_1)(a_2+a_3+b_2+b_3)] + (7,5p) \\ + x \sum b_i b_2 + 4b_1 b_2 b_3 \geq 0.$$

b) Dacă una dintre mulțimi este vidă sau două dintre mulțimi sunt egale, D are o linie nulă sau două linii egale, deci este nul.

Reciproc, cazul de egalitate are loc în următoarele situații.

I. Dacă $x \neq 0$, atunci este necesar ca două dintre numerele b_i să fie nule, de exemplu $b_2 = b_3 = 0$.

În acest caz trebuie să avem una dintre situațiile:

- $a_2 = a_3 = 0$, caz în care obținem $A_2 = A_3$;

- unul dintre a_2, a_3 este nenul (de exemplu $a_3 \neq 0$, situație în care $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0$), caz în care $A_1 = A_2$ sau $A_1 = A_3$.

II. Dacă $x = 0$ atunci trebuie ca unul dintre numerele b_i să fie nule, de exemplu $b_1 = 0$. În acest caz este necesar să avem una dintre situațiile:

- $a_1 = 0$ și două dintre a_2, a_3, b_2, b_3 sunt nule, caz în care obținem $A_1 = A_2$, $A_2 = \emptyset$, $A_1 = A_3$ sau $A_3 = \emptyset$;

- $a_1 \neq 0$, caz în care $a_2 + b_3 = 0$ sau $a_3 + b_2 = 0$, de unde $A_2 = \emptyset$ sau $A_3 = \emptyset$. **(15p)**

2. Dacă $a + b \neq e$, atunci limita este infinită, deci o condiție necesară este $a + b = e$. **(2,5p)** În

acest caz putem folosi regula lui l'Hospital pentru cazul $0/0$, deci limita se reduce la $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - a}{1/\sqrt{x} - 1/\sqrt[3]{x^2}}$.

Pentru ca această limită să fie finită, este necesar ca $a = e$, **(7,5p)** iar limita devine

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2/(3\sqrt[3]{x^5}) - 1/(2\sqrt{x^3})} = 6e. \text{ În concluzie, } a = e, b = 0 \text{ (7,5p), iar limita este } 6e. \text{ (5p)}$$

3. Logaritmand, rezultă condiția echivalentă $x \ln a \geq a \ln x, \forall x > 0$; **(2,5p)** în particular, pentru $x = e$, $e \ln a \geq a$ (*).

Pe de altă parte, considerând funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e \ln x - x$ avem $f'(x) = e/x - 1$, $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, e)$ și $f'(x) < 0$ pentru $x > e$, deci în punctul $x = e$ funcția are valoarea maximă, egală cu $f(e) = 0$. **(10p)** Aceasta arată că $e \ln x - x \leq 0, \forall x > 0$, iar egalitatea nu se poate obține decât pentru $x = e$. Astfel, relația (*) nu poate fi valabilă decât pentru $a = e$. Cele de mai sus arată și că această valoare a lui a verifică cerința. **(10p)**

4. Observăm că trebuie $x \in (0, 1)$ **(2,5p)** și că ecuația are soluția $1/2$. **(2,5p)**

**EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ****ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009**

Arătăm că aceasta este singura soluție. Pentru aceasta arătăm că funcția $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \log_{\frac{1}{4}} x$ este strict crescătoare. Derivata funcției este

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{x \ln(1/4)} = \frac{4^x - x \ln^2 4}{x \cdot 4^x \ln 4}.$$

Pentru funcția $g : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 4^x - x \ln^2 4$ avem $g'(x) = (4^x - \ln 4) \ln 4$, cu rădăcina $a \in (0,1)$. Deoarece g este descrescătoare pe $(0,a]$ și crescătoare pe $[a,1)$, reiese că g are valoarea minimă $g(a) = 4^a - a \ln^2 4 = \ln 4 - a \ln^2 4 = (1 - a \ln 4) \ln 4$. Cum $e^2 > 4 \Rightarrow 0 < \ln 4 < 2$ și

$4^a = \ln 4 < 2 \Rightarrow 0 < a < 1/2$, rezultă $g(a) > 0$, ceea ce arată că $f'(x) = \frac{g(x)}{x \cdot 4^x \ln 4} > 0, \forall x \in (0,1)$. Astfel, f este strict crescătoare. **(17,5p)**



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a XII-a – M1

SOLUȚII 10p din oficiu

1. Fie $g : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ și $x_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ un șir convergent la 0. Cum funcția g este continuă pe $[x_n, 2x_n]$, $\exists a_n, b_n \in [x_n, 2x_n]$ astfel încât $g(a_n) \leq g(t) \leq g(b_n)$, $\forall t \in [x_n, 2x_n]$, deci

$$\frac{g(a_n)}{t} \leq \frac{g(t)}{t} \leq \frac{g(b_n)}{t}, \quad \forall t \in [x_n, 2x_n].$$

Integrând pe $[x_n, 2x_n]$ rezultă

$$g(a_n) \leq \frac{1}{\ln 2} \int_{x_n}^{2x_n} \frac{1}{f(t)} dt \leq g(b_n). \quad (12,5p)$$

Deoarece g are proprietatea lui Darboux,

$$\exists c_n \in [a_n, b_n], g(c_n) = \frac{1}{\ln 2} \int_{x_n}^{2x_n} \frac{1}{f(t)} dt. \text{ Avem } x_n \leq c_n \leq 2x_n \Rightarrow c_n \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$g(c_n) = \frac{c_n}{f(c_n)} = \frac{1}{\frac{f(c_n) - f(0)}{c_n}} \rightarrow \frac{1}{f'(0)}. \text{ De aici } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_n}^{2x_n} \frac{dt}{f(t)} = \frac{\ln 2}{f'(0)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{dt}{f(t)} = \frac{\ln 2}{f'(0)}. \quad (10p)$$
2. Fie E elementul neutru al grupului G . Cum $E^2 = E$ și $E \neq I_2$ rezultă $\det E = 0$. (3p) Atunci din $AE = A, \forall A \in G \Rightarrow \det A = \det(AE) = \det A \det E = 0$, de unde $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$. (14,5p) Fie $A' \in G$ simetrica matricei A . Atunci $A^2 A' = \text{tr}(A) \cdot AA' \Rightarrow A = \text{tr}(A) \cdot E$. Pentru $A, B \in G$ avem $AB \in G \Rightarrow \text{tr}(AB)E = AB = \text{tr}(A)\text{tr}(B)E$. Cum $E \neq O_2$ -- altfel $|G| = 1$ -- rezultă $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$. Obținem că mulțimea $\{\text{tr}(A) | A \in G\}$ este parte stabilă cu n elemente a lui (\mathbb{C}^*, \cdot) , deci este egală cu U_n . Atunci $f : U_n \rightarrow G, f(\varepsilon^k) = \varepsilon^k E$ este izomorfism de grupuri. (5p)
3. Observăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$, deci, conform teoremei de medie limita este egală cu 0 pentru $a = 1$. (12,5p) Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} - ax \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_n^{n+1} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} - x \right) dx + \int_n^{n+1} (1-a)x dx \right) =$$

$$= (1-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} x dx = \text{sgn}(1-a) \infty. \quad (10p)$$
4. Fie $n = \text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$ și $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{C}$ rădăcinile distincte ale lui f' cu ordinele de multiplicitate r_1, r_2, \dots, r_p . Evident că $|f^{-1}(\{a\})| \leq n$, inegalitatea fiind strictă când polinomul $f - a$ are rădăcini multiple. O rădăcină multiplă a lui $f - a$ este și rădăcină a lui f' , deci este una dintre x_1, x_2, \dots, x_p -- de exemplu x_k , cu ordinul de multiplicitate $r_k + 1$ în $f - a$. Atunci

$$|A| = |f^{-1}(\{a\}) \cup f^{-1}(\{b\})| = |f^{-1}(\{a\})| + |f^{-1}(\{b\})| \geq 2n - \sum_{i=1}^p r_i = 2n - (n-1) = n+1. \quad (17,5p)$$

Fie $h = f - g$. Cum $h(z) = 0, \forall z \in A = f^{-1}(\{a\}) \cup f^{-1}(\{b\})$, rezultă că $h = 0 \Rightarrow f = g$. (5p)



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ
ETAPA FINALĂ NAȚIONALĂ – 13.06.2009

Clasa a XII-a – M2

SOLUȚII

1. În \mathbb{Z}_{100} avem $\hat{9}^{2009} = (\hat{9}^{40})^{50} \cdot \hat{9}^9 = \hat{9}^9 = 89$. **(22,5p – 2,5p pentru ultima cifră)**

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \int_3^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_3^x \frac{dt}{\ln t}}{\frac{x}{\ln x}} \stackrel{\text{l'Hopital}(2,5p)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln x}{\ln x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = 1$. **(20p+2,5p pentru ideea**

aplicării teoremei lui l'Hopital).

3. Fie $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$. Integrând prin părți obținem $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. **(7,5p)** Cum

$\ln x \in [0, 1], \forall x \in [1, e]$ rezultă $I_{n+1} \leq I_n \leq I_1 = 1$. **(5p)** De aici obținem $e - (n+1)I_n \leq 1 \Rightarrow \frac{e-1}{n+1} \leq I_n$.

Pe de altă parte, $I_{n+2} = e - (n+2)I_{n+1} = e - (n+2)(e - (n+1)I_n) = (n+1)(n+2)I_n - (n+1)e \leq 1$, de

unde $I_n \leq \frac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$. **(10p)**

4. Fie z o rădăcină a polinomului f . Avem $(z_1 z + z_2)^n = -(\bar{z}_1 z + \bar{z}_2)^n \Rightarrow |z_1 z + z_2| = |\bar{z}_1 z + \bar{z}_2|$. **(7,5p)**

Ridicăm la pătrat se obține $(z - \bar{z})(z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1) = 0 \Rightarrow -4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$. Dar

$z_1 \bar{z}_2 = (a+ib)(c+id) = ac+bd-i(ad-bc)$, deci $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = -\det(A) \neq 0$. Rezultă

$\operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. **(15p)**