



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

## ETAPA I – 17.10.2009

## CLASA a XII-a – M1

## Barem de corectare și notare

## Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	A	A	B	B	D	D	A	C	C	D

## Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1.  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; AX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} a-2b & 2a+b \\ c-2d & 2c+d \end{pmatrix}$  (1 punct),  $a = d, b = -c$  (1 punct),  $0 = \det(X) = a^2 + b^2 \Rightarrow X = O_2$  (1 punct).

2. Pentru fiecare  $k \in \{1, 2, \dots, 2009\}$ , luăm mulțimea  $M_k = \{\sigma^i(k) \mid i \in \mathbb{N}\}$  (1 punct). Din ipoteză,  $M_k$  au cel mult 2 elemente (1 punct). Cum 2009 este impar, există o astfel de mulțime cu un element, de unde rezultă cerința (1 punct).

3.  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 - a & b^3 - b & c^3 - c \end{vmatrix}$  (1 punct).  $6 \mid n^3 - n, \forall n \in \mathbb{Z}$  (1 punct), deci  $6 \mid \det(A)$  (1 punct).

4.  $\det A = 0$  (1 punct).  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-1 & b \end{vmatrix} = 1 \neq 0$  (1 punct). Rangul este 2 (1 punct).

5. Determinantul sistemului este  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 3 & 2 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  (2 puncte), deci sistemul are soluție unică (1 punct).

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}$  (1 punct).  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \frac{1}{2}$  (1 punct). Limita cerută este  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (1 punct).

7.  $x_{n+1} - x_n > 0, \forall n \geq 0$  (1 punct), deci șirul are limită. (1 punct). Fie  $l$  limita sa.  $l = l^2 + l + 2 \Rightarrow l = \infty$  (1 punct).

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$  (1 punct).  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$  (1 punct).  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow a = 0$  (1 punct).

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \frac{1}{2}$ , deci asimptota spre  $\infty$  este  $y = \frac{1}{2}$  (1 punct).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \infty$ ;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{x} = -2$  (1 punct),  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\sqrt{y^2 - y + 1} - y) = -\frac{1}{2}$ , deci asimptota spre  $-\infty$  este  $y = -2x - \frac{1}{2}$  (1 punct). Graficul nu admite asimptote verticale, deoarece  $f$  e continuă pe  $\mathbb{R}$ .

10.  $f'(x) = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1}$  (1 punct).  $= \ln(x^2 + 1) + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (1 punct). Funcția este crescătoare pe  $\mathbb{R}$  (1 punct).

### Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător. Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$  (1 punct),

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \ln^3(1+x)}{x^4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \ln(1+x) + \ln^2(1+x)}{x^2} = \frac{3}{2}$  (1 punct).

2. Prin inducție se arată că  $a_n = (2^n - 1)a, b_n = 2^n$  (1 punct). Limita este egală cu  $a$  (1 punct).

3.  $f'(x) = 2(x-1) + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}, \forall x \neq 1$  (0,5 puncte), deci  $f'(x) > 0, \forall x > 1$  și  $f'(x) < 0, \forall x < 1$  (0,5 puncte).

Rezultă din continuitatea în 1 că singurul punct de extrem este  $x = 1$  (1 punct).

4.  $A \begin{pmatrix} 5a \\ -2a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R}$  (1 punct). Rezultă că  $A \begin{pmatrix} 5a & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3, \forall a \in \mathbb{R}$  (1 punct).

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1$  (0,5 puncte).  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2$  (1 punct).

Asimptota este  $y = x + 2$  (0,5 puncte).

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.