



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a II-a – 20.02.2010

CLASA a X- a – TC+CD 3ore

Soluții

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C	C	B	E	C	A	E	B	E	A

Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

- Este echivalent cu $2^{\sqrt{2}} < 3$ (1 punct). $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} = 2\sqrt{2}$ (1 punct). $2\sqrt{2} < 3$ (1 punct).
- Este echivalent cu $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2$ (2 puncte). Finalizare (1 punct).
- În $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ avem o ecuație de grad 2: $t + \frac{1}{t} = 2$ (1 punct), cu soluția $t = 1$ (1 punct).

Obținem $x = 0$ (1 punct).

- $\log_3 3^x = \frac{x}{2} = \log_4 2^x$ (1 punct). De aici $2^x(1 + 2 \cdot 2^x) = 1$ (1 punct) . $x = -1$ (1 punct).
- $f(0) = 0 = f(m)$ (1 punct). $\Rightarrow m = 0$ (1 punct), care verifică (1 punct).
- Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = y$ are soluția unică $x = \frac{y+2}{3}$ (2 puncte).

Deci $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$ (1 punct).

- Fie $y \in [2, \infty)$. Ecuația $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ (2 puncte), iar soluția $x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in [1, \infty)$ (1 punct).

- Observăm că 0 este soluție (2 puncte). Produsul este 0. (1 punct).
- Observăm că 1 este soluție (2 puncte). Funcția din membrul stâng este strict crescătoare, deci soluția este unică. (1 punct).
- $f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(6) \in \{1, 2, 3\}$ (1 punct) și sunt distincte (1 punct) Suma este 6 (1 punct).

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

- $\log_3 5 \log_5 4 = 2 \log_3 5 \log_5 2$ (0,5 puncte).
 $2 \log_3 5 \log_5 2 = 2 \log_3 2 < 2$ (1 punct) $\log_3 5 + \log_5 3 \geq 2$ (0,5 puncte).

2. Observăm că 0 este soluție **(1 punct)**. Funcția din membrul stâng este strict crescătoare, deci soluția este unică. **(1 punct)**.

3. Fie $y > 0$. Ecuația $f(x) = y$ se scrie $6\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$. **(1 punct)**. Ecuația are soluție unică și

$$f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \log_{\frac{2}{3}} \frac{y}{6} \quad \textbf{(1 punct)}.$$

4. Fie $x > y$. Avem $2[x] \geq 2[y]$ **(1 punct)** și $f(x) > f(y)$ **(0,5 puncte)** Rezultă că funcția este strict crescătoare, deci injectivă **(0,5 puncte)**.

5. $g(f(x)) = f(x) + f(f(x))$ **(0,5 puncte)**. Din ipoteză rezultă $g(f(x)) = f(x) + x = g(x)$ **(0,5 puncte)**. Din injectivitatea lui g rezultă că $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. **(1 punct)**.