



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a II-a – 20.02.2010

CLASA a XII-a – M1

Soluții

Subiectul I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	A	B	C	C	A	D	A	E	C	A

Subiectul II

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 2} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 2}$ (2 puncte) $= \arctg x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ (1 punct).

2. $\int_1^2 \frac{1}{x^5 + x} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4(x^4 + 1)} dx$ (1 punct) $= \frac{1}{4} \int_1^{16} \frac{1}{t(t+1)} dt$ (1 punct) $= \frac{1}{4} \ln \frac{t}{t+1} \Big|_1^{16} = \frac{1}{4} \ln \frac{32}{17}$ (1 punct).

3. $x = f^{-1}(t) \Rightarrow t = f(x), dt = (3x^2 + 1)dx$ (1 punct)

$\int_0^2 f^{-1}(t) dt = \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(2)} x(3x^2 + 1) dx$ (1 punct) $= \left(\frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4}$ (1 punct).

4. $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$ (1 punct). $f''(x) = \frac{4x^4}{\sqrt{1+x^4}} + 2\sqrt{1+x^4} \geq 0$ (1 punct). De aici rezultă cerința (1 punct).

5. $x \in [0, 1] \Rightarrow x^2 \leq x \Rightarrow \cos x^2 \geq \cos x$ (1 punct) $\Rightarrow \int_0^1 \cos x^2 dx \geq \int_0^1 \cos x dx$ (1 punct) $= \sin 1$ (1 punct).

6. Elementele grupului au ordinul 1, 3 sau 9 (1 punct). $\hat{0}$ are ordin 1, elementele $\hat{3}, \hat{6}$ au ordinul 3 (1 punct), iar celelalte 6 elemente au ordinul 9 (1 punct).

7. $2 \circ x = x \circ 2 = 2, \forall x > 0$ (2 puncte), deci rezultatul este 2 (1 punct).

8. $x = \hat{k}, k \in \mathbb{Z}$ e soluție $\Leftrightarrow 4k - 12 = 128p, p \in \mathbb{Z}$ (1 punct) $\Leftrightarrow k = 32p + 3$ (1 punct) $x \in \{\hat{3}, \hat{35}, \hat{67}, \hat{99}\}$ (1 punct).

9. $A(x) = I_2 + xB$, unde $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Cum $B^2 = O_2$ (1 punct), $A(x)A(y) = A(x+y)$ (1 punct). Rezultă că

$f(x) = A(x)$ este izomorfism, deoarece $f: \mathbb{R} \rightarrow G$ este bijecție (1 punct).

10. $x + x^{-1} = -\hat{1} \Rightarrow x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$ (1 punct) $\Rightarrow x^3 = \hat{1}$. Dacă $x = \hat{1}$, atunci $x^{-1} = \hat{1}$ și $\hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \neq -\hat{1}$ (1 punct) iar dacă $x \neq \hat{1}$, atunci ordinul lui x în grupul multiplicativ este 3, care nu divide 16, fals (1 punct).

Subiectul III

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Cu substituția $t = 1 - x$ avem $I = \int_0^1 \log_{2+x-x^2} (x+1) dx = \int_0^1 \log_{2+t-t^2} (2-t) dt$. **(1 punct).**

Atunci $2I = \int_0^1 (\log_{2+x-x^2} (x+1) + \log_{2+x-x^2} (2-x)) dx = \int_0^1 dx = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$ **(1 punct).**

2. $I_n = \int_0^1 \cos nx \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{n} dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin nx}{n} \right)' \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{n} dx = \frac{1}{n} \sin nx \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \Big|_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{n \sin nx}{n^2 + x^2} dx$ **(1 punct)**

$= \frac{1}{n} \sin n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \int_0^1 \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} dx$ **(0,5 puncte).** Cum $|I_n| \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ **(0,5 puncte).**

3. Fie $a \in G - H$ și $a^{-1}H = \{a^{-1}h | h \in H\}$. Deoarece $f: H \rightarrow a^{-1}H, f(h) = a^{-1}h$ este bijecție, mulțimea $a^{-1}H$ are 50 de elemente **(1 punct)**. $H \cap a^{-1}H = \emptyset \Rightarrow H \cup a^{-1}H = G$ și $G - H = a^{-1}H$ **(0,5 puncte)**. Dacă $b \in G - H$, atunci $b = a^{-1}h, h \in H$, deci $ab \in H$ **(0,5 puncte)**.

4. Fie H un subgrup cu n elemente. Dacă $x \in H \Rightarrow x^n = e$ **(1 punct)**.

De aici rezultă $(x-1)^n + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$ **(0,5 puncte)**, deci $H = \{2\}$ **(0,5 puncte)**.

5. Dacă 13 divide $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, atunci $13 | x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow \hat{x}^5 = \hat{1}$ în \mathbb{Z}_{13} **(1 punct)**. Rezultă $5 | 12$, fals, sau $\hat{x} = \hat{1}$, de unde $\hat{5} = \hat{0}$ în \mathbb{Z}_{13} , fals **(1 punct)**.