



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a II-a – 20.02.2010

CLASA a XII- a – M2

Soluții

Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	E	D	B	D	D	A	E	C	A	A

Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

- $F(x) = \sqrt{x^2 + 16} + c$ (1 punct) $2 = F(3) = 5 + c \Rightarrow c = -3$ (1 punct) $F(0) = 4 - 3 = 1$ (1 punct).
- $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} = \frac{1}{8} \left(\int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 9} \right)$ (2 puncte) $= \frac{1}{8} \left(\arctg x - \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \right) + C$ (1 punct).
- $I_8 + \frac{1}{4} I_{10} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^8(x^2 + 4)}{x^2 + 4} dx$ (2 puncte) $= \frac{1}{4} \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{36}$ (1 punct).
- $0 \leq \int_0^1 \sin^n x dx \leq \int_0^1 \sin^n 1 dx = \sin^n 1$ (1 punct). $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n 1 = 0$ (1 punct). De aici rezultă cerința (1 punct).
- $\int_0^2 \frac{dx}{1 + |x - 1|} = \int_0^1 \frac{dx}{2 - x} + \int_1^2 \frac{dx}{x}$ (1 punct) $= -\ln |x - 2| \Big|_0^1 + \ln x \Big|_1^2$ (1 punct) $= 2 \ln 2$ (1 punct).
- $1 \circ x = 1, \forall x$ (2 puncte), deci rezultatul este 1 (1 punct).
- $-\hat{2} = \hat{7} \Leftrightarrow p \mid 9$ (2 puncte). Cum p este prim, rezultă $p = 3$ (1 punct).
- Fie e elementul neutru. Avem $e \circ x = 2ex + e + x = x, \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = 0$ (1 punct). Elementul $x \in \mathbb{Q}$ este simetrizabil $\exists x' \in \mathbb{Q}, x \circ x' = 2xx' + x + x' = 0 \Leftrightarrow 2x \neq -1$ (1 punct). $a = -\frac{1}{2}$ (1 punct).
- Funcția f este bijectivă (1 punct), $f(x) \circ f(y) = \ln x + \ln y - 1 = \ln xy - 1 = f(xy)$ (1 punct), deci f este izomorfism (1 punct).
- $x \circ x \circ x = x^{\ln x} \circ x = x^{\ln^2 x}$ (0,5 puncte). Ecuația devine $x^{\ln^2 x} = 2 \Leftrightarrow \ln^3 x = \ln 2$ (0,5 puncte) $\Rightarrow \ln x = \sqrt[3]{\ln 2}$ (1 punct) $\Rightarrow x = e^{\sqrt[3]{\ln 2}}$ (1 punct).

Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1. Funcția de sub integrală este impară **(1 punct)**. Integrala este 0 **(1 punct)**.

2. $n \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 (x^n)' x e^x dx = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^n (x+1) e^x dx$ **(1 punct)** $= e - I_n$.

Cum $|I_n| \leq 2e \int_0^1 x^n dx = \frac{2e}{n+1}$ **(0,5 puncte)**, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n e^x dx = e$ **(0,5 puncte)**.

3. $x = f^{-1}(t) \Rightarrow t = f(x), dt = 5x^4 dx$ **(0,5 puncte)** $\Rightarrow \int_0^1 f^{-1}(t) dt = \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)} 5x^5 dx$ **(0,5 puncte)**

$= 5 \int_{-1}^0 x^5 dx = \frac{5}{6} x^6 \Big|_{-1}^0 = -\frac{5}{6}$ **(1 punct)**.

4. Notăm $U(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$. Avem $U(a)U(b) = U(2ab)$ **(1 punct)**. De aici rezultă că elementul neutru este

$U\left(\frac{1}{2}\right)$ **(0,5 puncte)**. Inversa matricei este $A^{-1} = (U(2))^{-1} = U\left(\frac{1}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ **(0,5 puncte)**.

5. Dacă n este impar, suma este $\hat{0}$, deci $\hat{5} = \hat{0} \Rightarrow n | 5 \Rightarrow n = 5$ **(1 punct)**. Dacă n este par, $n = 2k$, atunci suma este \hat{k} . Atunci $\hat{k} = \hat{5} \Rightarrow 2k | k - 5 \Rightarrow k \in \{1, 5\} \Rightarrow n \in \{2, 10\}$ **(1 punct)**. Valorile sunt 2, 5 și 10.