



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a II-a – 20.02.2010

CLASA a IX-a – 4 ore

### Soluții

#### Subiectul I.

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspunsul	C	B	E	D	A	D	E	C	D	D

#### Subiectul II

- $\{\sqrt{2} - 1\} = \sqrt{2} - 1$  (1 p);  $\frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1$  (1 p);  $\{\sqrt{2} + 1\} = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$  (1 p).
- Pentru  $a < \sqrt{5}$ ,  $a \in A$  (1 p); dacă  $a > \sqrt{5}$  atunci  $a + 1 > \sqrt{5} + 1$  (1 p), deci  $a + 1 \in A$  (1 p).
- Pentru  $a \neq 1$  (1 p),  $x = \frac{1}{a-1}$ , deci propoziția este adevărată (1 p); pentru  $a = 1$  ecuația nu are soluție (1 p).
- $a_4 = a_1 + 6, a_5 = a_2 + 6, a_6 = a_3 + 6$  (1 p);  $a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + 18$  (1 p);  $S = 52$  (1 p).
- $-1 - a + b = 1$  (1 p) și  $1 + a + b = 1$  (1 p);  $b = 1, a = -1$  (1 p).
- Condițiile sunt  $x > 0$  și  $f(x) > 0$  (1 p);  $x \in (0, \sqrt{6})$  (1 p); sunt 2 puncte (1 p).
- $f(1) = a + 2$  (1 p);  $f(a + 2) = 3a + 4$  (1 p);  $a = -1$  (1 p).
- $ACBD$  este paralelogram (1 p), deci  $\overline{AC} = \overline{DB}$  (1 p); concluzia reiese din  $\overline{BD} = -\overline{DB}$  (1 p).
- $\overline{OC} = \overline{AO}$  (2 p);  $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{AB}$  (1 p).
- Dacă  $M$  este mijlocul bazei mari  $AB$ , atunci  $MA/MB = 1$  (1 p); dacă laturile neparalele  $BC$  și  $AD$  se taie în  $P$ , atunci  $\frac{CP}{CB} = \frac{DP}{DA}$  (1 p); concluzia rezultă din reciproca teoremei lui Ceva (1 p).

#### Subiectul III

- $|A| = |\mathcal{M}_{13}| - |\mathcal{M}_{13} \cap \mathcal{M}_{11}|$ ,  $|B| = |\mathcal{M}_{11}| - |\mathcal{M}_{13} \cap \mathcal{M}_{11}|$  (0,5 p);  $B$  are cu  $|\mathcal{M}_{11}| - |\mathcal{M}_{13}|$  mai multe elemente (0,5 p);  $|\mathcal{M}_{11}| - |\mathcal{M}_{13}| = \left[10^3/11\right] - \left[10^3/13\right] = 90 - 76 = 14$  (1 p).
- Funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 1]$  și pe fiecare interval de forma  $[k, (k+1)], k \leq 4$ , constantă pe  $[4, 5]$  și crescătoare pe  $[5, \infty)$  (1 p); valoarea minimă este  $f(5)$  (0,5 p), care este  $(5-1) + \dots + (5-4) + (6-5) + \dots + (10-5) = 25$  (0,5 p).
- Dacă  $a \leq 1$ , imaginea este  $[2-a, 8-a]$ , de lungime 6 (0,5 p); dacă  $a \geq 4$ , imaginea este punctul  $a$  (0,5 p); dacă  $a \in (1, 4)$ , imaginea este  $[a, 8-a]$  (0,5 p); rezultă  $a = 2$  (0,5 p).
- Arătăm că suma este un vector cu originea într-un vârf al patrulaterului și extremitatea în interior (1 p). Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că unghiul cel mai mare al patrulaterului este  $A$ . Atunci  $A + B \geq D + B = 180^\circ$  și  $A + D \geq B + D = 180^\circ$ , deci paralelele din  $B$  la  $AD$  și din  $D$  la  $AB$  se intersectează într-un

punct  $P$  situat în interiorul patrulaterului. Atunci  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CP}$ , care are lungimea mai mică decât diametrul cercului (**1 p**).

**5.** Dacă  $P$  este centrul de greutate, atunci  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$  (**1 p**).

Reciproc, dacă  $\overrightarrow{AC_1} = x\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA_1} = y\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CB_1} = z\overrightarrow{CA}$  și  $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \vec{0}$ , atunci, din  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  reiese  $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} = z(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ , deci  $x = y = z$  (**0,5 p**). Din condiția de concurență rezultă  $x^3/(1-x)^3 = 1$ , de unde  $x = 1/2$ , adică  $P$  este centrul de greutate (**0,5 p**).