



## EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a III-a – 24.04.2010

CLASA a XII-a M1

## Soluții

## Subiectul I

Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă punctajul maxim prevăzut în dreptul fiecărei cerințe (5puncte), fie 0 puncte.

Nu se acordă punctaje intermediare.

Nr. item	I.1.	I.2.	I.3.	I.4.	I.5.	I.6.	I.7.	I.8.	I.9.	I.10.
Rezultate	C	A	B	E	A	C	C	A	D	C

## Subiectul II

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

1. Din ipoteză,  $n|35$  (1 punct). Rezultă  $n \in \{5, 7, 35\}$  (2 puncte).
2.  $fg = 2aX^2 + aX + 3$  (1 punct). Trebuie ca  $2a = \hat{0}$  și  $a \neq \hat{0}$  (1 punct), deci  $a = 3$  (1 punct).
3. Trebuie ca  $f(-1) = f(2)$  (1 punct).  $f(-1) = 3$  (1 punct),  $f(2) = 3$  (1 punct).
4. Ipoteza se scrie  $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1x_2x_3$ . Cum  $x_1 + x_2 + x_3 = 3$  (1 punct),  $x_1x_2x_3 = -a$  (1 punct), rezultă  $a = -1$  (1 punct).
5.  $0 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1 - x_2 - x_3 + 3a$  (1 punct),  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  (1 punct), deci  $a = -\frac{1}{3}$  (1 punct).
6.  $f'(x) = e^x \sin \pi x$  (1 punct),  $f'(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$  (1 punct). Suma cerută este 0 (1 punct).
7.  $\sin x \leq 1$  (1 punct).  $\int_0^1 x^n \sin x dx \leq \int_0^1 x^n dx$  (1 punct)  $= \frac{1}{n+1}, \forall n$  (1 punct).
8. Avem  $f(x) - g(x) = e^x + 2x - 1 \geq 0, \forall x \in [0, 1]$  (1 punct). Aria este  $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$  (1 punct)  $= (e^x + x^2 - x) \Big|_0^1 = e - 1$  (1 punct).
9. Volumul este egal cu  $V = \pi \int_0^a (x+1) dx$  (1 punct)  $= \pi \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^a = \pi \left( \frac{a^2}{2} + a \right)$  (1 punct).  
 $\pi \left( \frac{a^2}{2} + a \right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow a = 1$  (1 punct).
10. Aria este  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg^2 x + 1) tg x dx$  (1 punct)  $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg x (tg x)' dx$  (1 punct)  $= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$  (1 punct).

### Subiectul III

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.  
Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

1.  $s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = 4$ ,  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = s_1^2 - 2s_2 = 3^2 - 2 \cdot 4 = 1$  **(0,5 puncte)**.

$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 = 3 \sum_{i=1}^4 x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j$  **(1 punct)**. Rezultă  $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 < 0$ , de unde concluzia **(0,5 puncte)**.

2.  $a - b$  divide  $f(a) - f(b) = \pm 1$  **(1 punct)**. Rezultă  $a - b = \pm 1$ , de unde concluzia **(0,5 puncte)**.

3.  $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{n+2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 2\frac{k}{n}}$  **(0,5 puncte)**. Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$  **(0,5 puncte)**, șirul de

diviziuni  $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$  convergent în normă la 0, și sistemul de puncte intermediare

$\xi_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  **(0,5 puncte)**. Suma dată este suma Riemann, deci converge la

$\int_0^1 \frac{1}{1 + 2x} dx = \frac{1}{2} \ln \left( x + \frac{1}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3$  **(0,5 puncte)**.

4. Volumul este egal cu  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$  **(1 punct)**. Cu schimbarea de variabilă

$t = 1 + \sin 2x$ ,  $dt = 2 \cos 2x$ , avem  $V = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln 2$  **(1 punct)**.

5. Aria este  $S(a) = \int_1^a e^{x^2} dx$ ,  $a \in (1, 2)$  **(0,5 puncte)**. Funcția  $S$  este continuă,

$S(1) = 0$ ,  $S(2) = \int_1^2 e^{x^2} dx > \int_1^2 e dx = e > 2$  **(1 punct)**, deci există  $a \in (1, 2)$  cu  $S(a) = 1$  (sau 2) **(0,5 puncte)**.

Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.