



EVALUARE ÎN EDUCAȚIE la MATEMATICĂ

ETAPA a III-a – 24.04.2010

CLASA a XI-a M1

Soluții

Subiectul I.

Subiectul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspunsul	A	B	E	C	D	B	B	A	D	E

Subiectul II

- Determinantul sistemului format din ecuațiile celor două drepte are determinantul $2a+1$ (1 punct); dacă $2a+1 \neq 0$, atunci sistemul are soluție unică (1 punct), iar dacă $2a+1=0$, atunci dreptele coincid (1 punct).
- Trebuie ca determinantul sistemului să fie 0, deci $a=-1$ (2 puncte); atunci $b=-2$ (1 punct).
- Problema continuității apare doar în 2 (1 punct); pentru ca limita la stânga să fie finită, $a=4$ (1 punct); în acest caz $b=2$ (1 punct).
- Considerăm $f(x) = \sin x - x \cos x$ (1 punct); $f(n\pi)f(\pi+n\pi) < 0$ (1 punct); de aici rezultă cerința (1 punct).
- Funcția este strict crescătoare, deci injectivă (1 punct); din faptul că este nemărginită superior și inferior (1 punct) și din proprietatea lui Darboux rezultă că este surjectivă (1 punct).
- Ecuația tangentei este $y-3=-(x-1)$ (2 puncte); aria este 8 (1 punct).
- Dacă f este derivabilă atunci și $2f$ este derivabilă (1 punct) și $f''=2f'=4f$ (1 punct). Un exemplu este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}$ (1 punct).
- $f'(x) = \frac{n}{\sqrt{x^2-1}} f(x)$ (1 punct); $f''(x) = \frac{n^2}{x^2-1} f(x) - \frac{nx}{(x^2-1)^{3/2}} f(x)$ (1,5 puncte), de unde cerința (0,5 puncte).
- Din $f(0)=f(2)$ reiese $c=2$ (1 punct); pentru derivabilitatea în 1, $a+b=-1$ și $2a+b=1$, deci $a=2$, $b=-3$ (2 puncte).
- Din teorema lui Lagrange, există $c \in (0;2)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 2$ (2 puncte); tangenta în c are panta 2 (1 punct).

Subiectul III

- Arătăm că determinantul sistemului este nenul (1 punct); calculându-l, obținem 9 produse de forma $a_i a_j a_k = \pm 1$, de unde concluzia (1 punct).
- $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+\cos x) - \ln(1-\cos x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{1-\cos^2 x} = \frac{-1}{\sin x}$ (1,5 puncte); soluția ecuației este $\pi/2$ (0,5 puncte).

3. Ecuația tangentei în $(a; f(a))$ este $y - f(a) = -a^{-1/3}(1 - a^{2/3})^{1/2}(x - a)$ **(0,5 puncte)**; intersecția cu Ox are abscisa $\alpha = a^{1/3}$ **(0,5 puncte)** iar intersecția cu Oy are ordonata $\beta = (1 - a^{2/3})^{1/2}$ **(0,5 puncte)**; de aici $AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ **(0,5 puncte)**.
4. Condiția arată că $f(x) = a^x + 2^x - 3^x - 4^x \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ **(1 punct)**; astfel f are un minim în 0, deci $f'(0) = 0$, de unde $a = 6$ **(0,5 puncte)**; pentru $a = 6$, condiția este verificată **(0,5 puncte)**.
5. Prin derivare repetată și considerarea valorii $x = 0$ obținem $a_1 + 2^{2k+1}a_2 + \dots + 10^{2k+1}a_{10} = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ **(1 punct)**; sistemul obținut are determinantul nenul, de unde concluzia **(1 punct)**.